MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XVIII.

FASCICOLO SECONDO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

NB. La figura della Memoria Mossotti sta nella prima Tavola della Memoria Fabbroni contenuta in questo Fascicolo.

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE NEL SECONDO FASCICOLO

DI MATEMATICA DEL TOMO XVIII.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

SUL MOVIMENTO DI UN' ELICE ELASTICA CHE SI SCATTA

MEMORIA

Di Ottaviano Fabrizio Mossotti

Presentata dal Socio Cav. Brunacci

APPROVATA DAL SIG. PRESIDENTE RUFFINI

Ricevuta li 2. *Settembre* 1817.

1. In una Memoria, intitolata *Usage et Théorie d'une Machine qu'on peut nommer Instrument Ballistique*, inserita fra quelle dell' Accademia di Berlino dell' anno 1781. i due fratelli Giovanni e Giacomo Bernoulli hanno preso a determinare la velocità che un filo metallico piegato in forma d'elice può comunicare ad nn corpo sovrapposto o contiguo. I tentativi di questi Geometri sono molto lodevoli, ma pei diffetti degli Istrumenti de' quali hanno dovuto servirsi in mancanza di migliori, e parmi anche per qualche errore sfuggito nella loro teorica, non riuscirono ad ottenere un soddisfaccente accordo tra i risultamenti del calcolo e quelli degli esperimenti. Procurerò in questo scritto di supplire all' imperfezione della teorica data dai Bernoulli, e mentre ver-

rò così ad eliminare alcuni elementi di discrepanza fra la teorica ed i loro esperimenti, preparerò delle formole che spero potranno essere utili a coloro i quali vorranno instituire dei nuovi esperimenti con migliori elastri, o far uso di questi in qualche macchina.

Per risolvere i problemi che mi sono proposti ho assunto due ipotesi, le quali sono però così da vicino verificate dagli sperimenti che, piuttosto che ipotesi, possono risguardarsi come regole di fatto La prima di queste ipotesi è riposta in ciò, che l'elice elastica debba in tutto il tempo dello scatto o dilatazione conservare la figura d'elice ed un egual numero di rivoluzioni, talmente che nell'allargarsi i passi delle spire, sia soltanto il diametro dell' elice che venga successivamente a diminuire. Colla seconda ipotesi stabilisco ad imitazione di Daniele e Giacomo Bernoulli che gli accorciamenti o costipazioni che possono farsi soffrire all' elice siano proporzionali alle forze o pesi comprimenti atti a produrle. Allorchè nella soluzione dei problemi mi occorrerà di assumere per la prima volta alcuna di queste ipotesi avrò cura di far conoscere gli esperimenti che mi hanno persuaso ad adottarla, acciò il lettore sia egualmente convinto della legittimità della medesima.

I Bernoulli ed altri autori, che hanno considerato il movimento degli elastri piegati in forma d'elice, hanno per semplicità supposto nei loro calcoli che il movimento oscillatorio di un' elice fissa in un estremo sia eguale a quello di una fibra rettilinea ed omogenea dotata d' una stessa massa e d' una pari elasticità, e la cui lunghezza fosse rappresentata dall' asse stesso dell' elice. Alla fine della presente Memoria farò vedere come questa supposizione è giusta, e come le equazioni che rappresentano il moto di una fibra rettilinea ed omogenea sono le stesse di quelle appartenenti alle oscillazioni di un' elice elastica. V' è però una notabile differenza fra i miei risultamenti e quelli degli autori che mi hanno preceduto. Secondo questi se si suppone che

la fibra elastica sia spogliata in tutta la lunghezza della sua massa, e si immagini che il terzo della medesima sia concentrato nell' estremità mobile, i moti di quest' elastro immaginario devono accompagnare esattamente quelli dell' elastro vero; secondo me non è il terzo della massa dell' elastro che deve supporsi concentrato nell' estremità mobile, ma la metà. La strada semplice e diretta colla quale ho risoluti i problemi parmi che basti a convincere dell' esattezza delle nuove formole a preferenza delle antiche, e non ho creduto opportuno entrare in disquisizioni particolari sull' erroneità di queste ultime, perchè ciò ci avrebbe condotti troppo lontani dall' oggetto di questa Memoria.

2. Per più chiara intelligenza premetterò quì le definizioni di alcuni termini che userò ad oggetto di evitare certe circonlocuzioni ed abbreviare così il discorso.

La curva che può immaginarsi descritta sulla superficie di un cilindro retto da un filo che si avvolge attorno allontanandosi dalla base con uniforme e regolare distanza sarà da noi detta *elice* ovvero *spirale*.

Una sola ma intiera rivoluzione di questo filo sarà chiamata *spira*, e la distanza fra i due punti estremi della spira si dirà *passo*, della spirale, o dell' elice.

La retta che può concepirsi in mezzo alla spirale egualmente lontana da tutti i suoi punti si chiamerà *asse* della spirale.

E finalmente nomineremo *circolo di projezione* il circolo che risulterebbe projettando tutti i punti della spirale su di un piano perpendicolare all' asse, ed il raggio di questo circolo lo diremo anche *raggio della spirale o dell' elice*.

PROBLEMA I.

3. „ Supposta un' elice elastica composta di un nume-
„ ro intiero di spire, non pesante, e posta perpendicolar-
„ mente su di un piano resistente, essendo prima ritenuta

„ compressa da un ostacolo, rimosso immediatamente l'osta-
„ colo, si dimandano le relazioni tra gli elementi del moto
„ nello scatto dell' elice che segue. „

Soluzione. Siccome nessuna forza esterna agisce sulla spirale per trasportarla, ed essendo supposta di un numero intiero di spire, la corrispondente disposizione delle sue parti fa che non vi sia ragione per cui essa si muova piuttosto da una banda che dall' altra, così è evidente che l' asse della medesima resterà immobile. Prendo quest' asse per l' asse delle z, e conduco al piede del medesimo nel piano su cui giace la spirale due altri assi delle x, e delle y ortogonali fra loro, ed in modo che quello delle x passi pel punto della spirale in contatto col piano. Ciò fatto

Sia Δ la densità della materia componente l' elice.
π il rapporto del diametro alla circonferenza.
r il raggio del filo dell' elice.

Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque corrispondente all' estremità dell' arco s alla fine di un tempo t contato dal principio del moto

f, f', f'' le somme delle forze acceleratrici secondo i rispettivi assi di tutti i punti del detto arco s.

È noto che saranno $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ le forze acceleratrici secondo i detti assi del punto corrispondente alla fine dell' arco s.

Considerando le tre quantità f, f', f'' funzioni di s, e facendo che s aumenti di una quantità ω, le tre serie

$$f + \omega\left(\frac{df}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{L}.$$

$$f' + \omega\left(\frac{df'}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f'}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{M}.$$

$$f'' + \omega\left(\frac{df''}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f''}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{N}.$$

esprimeranno le somme delle forze acceleratrici secondo i tre assi di tutto l' arco $s + \omega$, onde sottraendo le prime somme da queste rimarranno le serie

$$\text{(H)}\quad\begin{array}{l}\omega\left(\frac{df}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)+\omega^3\ \mathrm{L}\,.\\ \omega\left(\frac{df'}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f'}{ds^2}\right)+\omega^3\,\mathrm{M}\,.\\ \omega\left(\frac{df''}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f''}{ds^2}\right)+\omega^3\,\mathrm{N}\,.\end{array}$$

le quali saranno le somme delle forze acceleratrici nella direzione dei tre assi, ossia le forze motrici dell' arco ω. Immaginiamo tre forze acceleratrici A, A', A'' secondo gli stessi assi delle x, y, z tali che tutto l'arco ω essendo animato da queste tre forze acceleratrici ne risultino tre forze rispettivamente eguali a quelle delle tre serie soprascritte. È evidente che queste tre forze dovranno essere della forma. (*)

$$\mathrm{A}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{X}\,,\quad \mathrm{A}'=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{Y}\,,\quad \mathrm{A}''=\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{Z}\,;$$

essendo X una funzione di t, x, ω; Y una funzione di t, y, ω, e parimenti Z una funzione di t, z, ω che non diventano infinite quando $\omega=0$. Infatti se noi supponiamo che ω diventi zero, le forze acceleratrici A, A', A'' devono ridursi a quelle del punto corrispondente alle coordinate x, y, z, come appunto addiviene poichè fatto $\omega=0$ si ha

$$\mathrm{A}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad \mathrm{A}'=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right),\quad \mathrm{A}''=\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Moltiplichiamo ora quelle tre forze acceleratrici A, A', A'' per la massa dell' elastro ω, la quale è evidentemente espressa da $\Delta\pi r^2\omega$, per la supposizione fatta le tre forze motrici che ne risultano dovranno eguagliare quelle espresse dalle tre serie (H) ed avremo le equazioni

$$\Delta\pi r^2\omega\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{X}\right]=\omega\left(\frac{df}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)+\omega^3\mathrm{L}.$$

(*) Vedi una Memoria del Prof. Brunacci fra quelle dell' Istituto Nazionale Italiano, Tomo I, Parte II pag. 79, ove il principio di cui faccio uso per evitare la considerazione degli infinitamente piccoli fu per la prima volta messo in campo.

$$\Delta \pi r^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \omega Y \right] = \omega \left(\frac{df'}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f'}{ds^2}\right) + \omega^3 M .$$

$$\Delta \pi r^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \omega Z \right] = \omega \left(\frac{df''}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f''}{ds^2}\right) + \omega^3 N .$$

dalle quali, paragonando i coefficienti delle prime potenze di ω, si dedurranno le seguenti.

$$(1) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right)$$

$$(2) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \left(\frac{df'}{ds}\right)$$

$$(3) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \left(\frac{df''}{ds}\right).$$

4. Scolio I. Volendo risolvere rigorosamente il problema converrebbe ora avere le espressioni delle forze f, f', f'' in funzioni delle coordinate x, y, z, e dell'arco s o delle loro differenziali, e sostituire questi valori nelle ultime equazioni ottenute. Risulterebbero così delle equazioni a *differenziali parziali* dall'integrazione delle quali dipenderebbe la soluzione del problema, il cui sviluppo riuscirebbe perciò intralciato da tutte quelle difficoltà che sono proprie di questo ramo di calcolo integrale. Per evitare queste difficoltà, insuperabili nello stato attuale dell' analisi, ho assunta un' ipotesi che mi ha suggerito un esperimento instituito dal Sig. Francesconi, e da me.

Abbiamo presa una spirale nera di acciajo fissa con una delle sue estremità in un piano immobile, e l' abbiamo costipata sino al totale contatto delle sue spire, in modo che l' elice costituiva la superficie di un cilindro retto. Sulla superficie di questo cilindro con una riga abbiamo segnata una linea retta, bianca, parallela all' asse dell' elice, ed abbiamo così abbandonata l' elice a se stessa. Nelle oscillazioni che succeddettero si osservò che i punti bianchi di ciascuna spira che prima costituivano una linea retta continua, nell' allargarsi i passi delle spire si staccavano l'uno dall'altro, ma rimanevano costantemente sulla stessa retta o sul suo prolungamento. Le oscillazioni essendo molto rapide non permette-

vano che si distinguesse se le distanze fra questi punti erano per ciascun istante eguali su tutta la lunghezza dell' elice, ma moderando superiormente colla compressione di una mano la rapidità delle oscillazioni sino al punto che queste distanze si potevano ben percepire coll' occhio non si potè notare fra loro alcuna sensibile differenza. (*).

Le stesse prove ripetute su di un' altra spirale di ottone più sottile ma più lunga ci hanno somministrato gli stessi risultamenti. (**).

Da quest' esperimento se ne deduce un' importantissima conseguenza pel nostro oggetto. Poichè i punti bianchi segnati su ciascuna spira rimangono costantemente in linea retta ed a distanze eguali, forz' è che l' elastro conservi costantemente la figura d' elice, e sia composto di un egual numero di rivoluzioni, o spire. Sia adunque a il raggio del circolo di projezione dell' elice, ed e l' inclinazione della spirale, ossia l' angolo che farebbe la tangente ad un punto qualunque della medesima col piano delle x, y, le coordinate x, y, z dovranno soddisfare alle equazioni che rappresentano le projezioni dell' elice, che sono

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad z = a.\ \tan.e.\ \text{arc.}\ \sin.\frac{y}{a}.$$

Di più per le proprietà di questa curva si avranno le equazioni

$$(4) \qquad z = s.\ \sin.e \qquad a.\ \text{arc.}\sin.\frac{y}{a} = s\ \cos.e\ .$$

Denomino β l' angolo che ha per seno $\frac{y}{a}$, sarà

(*) Questo risultamento è un po' alterato se l' elice è posta verticalmente, perchè in tal caso il peso delle spire superiori che gravita sulle inferiori, fa che i passi dell' elice siano verso il basso successivamente un poco minori, ma la differenza di questi passi nelle spirali che abbiamo usato non era notabile che nelle due ultime spire.

(**) Per più precisa informazione di questi esperimenti devo avvertire che la prima spira superiore dell' elice era ridotta con una saldatura in una circonferenza piana.

$$(5) \qquad y = a \sin . \beta$$

onde sostituendo, le nostre equazioni diverranno

$$(6) \qquad x = a \cos . \beta \qquad\qquad a\beta = s . \cos . e .$$

Ciò posto osservo, 1.° che essendo la lunghezza del filo della spirale per la natura della materia di cui è composto immutabile, e variando nelle oscillazioni della medesima continuamente la sua inclinazione, ossia l' angolo e, l' elastro non potrà conservare la figura d' elice ed un numero eguale di spire, come mostrano gli esperimenti, senza che il raggio a del circolo di projezione venga successivamente a variare. 2.° Che invece, se si abbassa da un punto qualunque dell' elice una perpendicolare sul circolo di projezione, l' arco compreso tra il piede di questa perpendicolare ed il punto d' intersezione dell' asse delle x colla stessa circonferenza, ossia l'angolo β deve rimanere sempre di un egual numero di gradi.

Dunque nelle nostre equazioni, variando il tempo, l'arco s e l' angolo β rimangono costanti per uno stesso punto, e variano le sole quantità e ed a, ed è per se evidente che passando nello stesso istante da un punto all' altro della curva varieranno viceversa le quantità s e β, mentre le altre due e ed a rimarranno costanti.

Dividendo l' ultima equazione per as si hanno i due rapporti seguenti

$$\frac{\beta}{s} = \frac{\cos . e}{a} .$$

Il primo rapporto è composto di quantità che non variano col tempo, il secondo di quantità che non variano passando da un punto all' altro della curva, questi due rapporti essendo altresì eguali converrà che ciascheduno di loro sia costante per le due dette variazioni. Chiamo ρ questo rapporto costante, ed ho

$$\beta = \rho s \qquad\qquad a = \frac{1}{\rho} \cos . e$$

per la sostituzione di questi valori le equazioni (4), (5), (6), diverranno

$x = \frac{1}{\rho}$ cos. e cos. ρs, $y = \frac{1}{\rho}$ cos. e sin. ρs, $z = s$ sin. e

nelle quali ripeto, e varia soltanto col tempo, ed s passando da un punto all' altro della curva.

Differenziando queste equazioni due volte relativamente a t, si avrà.

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\cos.\rho\, s$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\sin.\rho\, s$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2\sin e}{dt^2}\right) s$$

sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2), (3), avremo

$$\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\cos.\rho\, s = \left(\frac{df}{ds}\right)$$

$$\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\sin.\rho\, s = \left(\frac{df'}{ds}\right)$$

$$\Delta\,\pi\, r^2 \left(\frac{d^2\sin.e}{dt^2}\right) \times s = \left(\frac{df''}{ds}\right)$$

integrando relativamente ad s si otterrà

$$\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\sin\,\rho\, s = f + c$$

$$-\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos\, e}{dt^2}\right)\cos.\rho\, s = f' + c'$$

$$\Delta\,\pi\, r^2 \left(\frac{d^2\sin.e}{dt^2}\right)\frac{s^2}{2} = f'' + c''.$$

All' oggetto di determinare le costanti, osservo che essendo $\rho s = \beta$, al principio della spirale si ha $s = 0$, $\rho s = \beta = 0$, $f = f' = f'' = 0$, onde sarà

$$c = 0, \qquad c' = -\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right), \qquad c'' = 0$$

dunque le nostre equazioni diverranno

$$(7) \qquad \Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\sin.\rho s = f$$

$$(8) \quad -\Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos.e}{dt^2}\right)\cos.\rho s = f' - \Delta\,\pi\, r^2\, \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos\, e}{dt^2}\right)$$

$$(9) \qquad \Delta\,\pi\,r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) \frac{s^2}{2} = f''$$

estendendo ora questi integrali a tutta la lunghezza dell' arco dell' elice col fare $s = \sigma$ ed osservando che per esser la medesima composta di un numero intiero n di spire si ha $\beta = \rho\sigma = 2n\pi$, resteranno le equazioni

$$(10) \qquad 0 = f$$

$$(11) \qquad 0 = f'$$

$$(12) \qquad \Delta\,\pi\,r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) \frac{\sigma^2}{2} = f''.$$

5. Scolio II. Per proseguire nell' equazione (12) le integrazioni relativamente al tempo conviene prima conoscere la misura della forza f''. È evidente che, se supponiamo l'elastro costipato e posto verticalmente, sovrapponendo un peso che impedisca che più si allunghi, questo peso misurerà la somma delle forze acceleratrici verticali colle quali l' elastro si distenderebbe in quell' istante essendo in libertà, ossia la forza f''. Questa forza sarà poi diversa anche nello stesso elastro variando la sua lunghezza, ossia secondo i diversi stati di compressione, e la sola esperienza può somministrare la legge della variabilità della medesima. Per scoprire questa legge ricorrerò alle esperienze eseguite da qualche fisico, e darò principio col riferire quelle che trovansi nella Memoria citata nelle prime linee di questo scritto.

Il Sig. Giovanni Bernoulli situò verticalmente una spirale d' acciajo, ed osservò con esattezza sopra una scala posta di fianco il punto a cui corrispondeva l' estremità superiore dell' elastro, quindi esaminò di quanto questo punto discendeva sovrapponendo successivamente all' elice dei pesi multipli, e cominciando da un quarto di libbra, osservò le costipazioni contenute nella seguente tavola.

Pesi in $\frac{1^{ti}}{4}$ di libbra	Costipazioni in $\frac{1^{ti}}{4}$ di linea	Aumenti delle costipazioni
1	6	6
2	14	8
3	20	6
4	26	6
5	32	6
6	38	6
7	45	7
8	52	7
9	58	6
10	65	7
11	72	7
12	79	7
13	86	7
14	92	6
15	99	7
16	107	8
17	114	7
18	122	8
19	130	8
20	138	8
21	145	7
22	151	6
23	157	6
24	161	4

Si vede in questa tavola che la prima colonna indica i pesi, la seconda le costipazioni corrispondenti a ciascun peso, la terza gli aumenti delle costipazioni, o le differenze tra le costipazioni per ciascun aumento di peso. Queste differenze poco si scostano dal loro medio che è 6,7 di quarti di linea, cosccichè le piccole differenze sembrano dovute agli errori inevitabili delle osservazioni. Si può adunque conchiudere che gli aumenti delle costipazioni crescono nella stessa ragione degli aumenti de' pesi, o ciò che torna lo stesso, che le costipazioni totali sono proporzionali ai pesi comprimenti.

Anche il Sig. Gravesande nella bella sua opera *Phyisices Elementa Mathematica* ec. al capo XIII del libro II accenna un esperimento, in cui avendo fatto sopportare ad un elastro

una mezza libbra di peso lo costipò di un mezzo pollice, poi aggiungendo un egual peso la discesa fu parimenti di un mezzo pollice, e così di seguito sin che l'elastro non si potè più comprimere.

Il Sig. Professore Francesconi ha voluto unitamente a me verificare il medesimo esperimento sulla spirale di ottone di cui ho fatto cenno nel numero precedente. Questa spirale che era del peso 731 grammi (*) portata dalla posizione orizzontale a quella verticale si accorciava di 23 millimetri. In questa situazione della spirale abbiamo sovrapposto alla spira superiore, la quale era ridotta mediante una saldatura in una circonferenza piana, un tampone dal cui centro pendeva un filo che passava per l'asse stesso dell'elice. Il peso del tampone e del filo era di 9 grammi, ed il filo sosteneva un secchio pesante 200 grammi nel quale si ponevano i pesi atti a produrre i varii gradi di costipazione come si trovano notati nella seguente tavola

Stati dell' elice	Pesi comprimenti	Costipazioni prodotte	Aumenti delle costipazioni
Spirale orizzontale	o	o	o
Spirale verticale	—	23	23.
Spirale verticale con tampone, filo e secchio	209	36	13
	754	63	27
	1299	90	27
	1844	117	27
	2389	144	27
	2934	171	27
	3479	198	27

Da questa tavola si vede che posta la spirale verticalmente,

(*) I pesi e le misure sono secondo il nuovo sistema.

e poi aumentando i pesi comprimenti di 545 grammi per volta la spirale si costipa costantemente di 27 millimetri.

I risultamenti di tutti questi esperimenti ci autorizzano a stabilire per la variabilità della forza elastica delle spirali secondo le diverse loro lunghezze la legge seguente. Sia Λ l' altezza verticale della spirale non aggravata, e λ quella che riceve quando è aggravata da un peso rappresentato da gp (g dinota la gravità), avremo per determinare il peso o la forza elastica f'' corrispondente all' altezza z' la proporzione

$$\Lambda - \lambda : \Lambda - z' :: gp : f''$$

e quindi

$$f'' = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Sostituito questo valore nell' equazione (12) avremo

$$\Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2} \right) \frac{\sigma^2}{2} = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Ora essendo per un arco qualunque $z = s \sin.e$, sarà z' che rappresenta la coordinata dell' ultimo punto della spirale eguale a $\sigma \sin.e$ per cui si avrà

$$\sin.e = \frac{z'}{\sigma}$$

e perciò

$$\left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2} \right) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d^2 z'}{dt^2} \right).$$

Ponendo nella precedente equazione questo valore, risulterà

$$\frac{\Delta \pi r^2 \sigma}{2} \left(\frac{d^2 z'}{dt^2} \right) = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$$

ossia rappresentando con m la massa della spirale che è eguale a $\Delta \pi r^2 \sigma$

$$(13) \qquad \frac{m}{2} \left(\frac{d^2 z'}{at^2} \right) = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Facciasi

$$\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda} = y \qquad \frac{2gp}{m(\Lambda - \lambda)} = \alpha^2$$

avremo

$$\alpha^2 y + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0 .$$

L' integrale di quest' equazione lineare di second' ordine è

$$y = \varepsilon' e^{at\sqrt{-1}} + \varepsilon'' e^{-at\sqrt{-1}}$$

essendo e la base dei logaritmi iperbolici, ed ε', ε'' due costanti arbitrarie. Per determinarle osservo che chiamata k la lunghezza della spirale al principio del moto, ossia quando $t = 0$ si avrà $z' = k$, e $\left(\frac{dz'}{dt}\right) = 0$, perchè la velocità in quest' istante è zero, avremo così le due equazioni

$$\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda} = \varepsilon' + \varepsilon''$$

$$0 = \varepsilon' a\sqrt{-1} - \varepsilon'' a\sqrt{-1}\,.$$

Dalla seconda di queste equazioni si ottiene $\varepsilon' = \varepsilon''$, onde dalla prima si dedurrà

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda}\,.$$

Sostituiti questi valori nella precedente espressione di y si ha

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda}\left[e^{at\sqrt{-1}} + e^{-at\sqrt{-1}}\right]$$

o sia perchè è $e^{at\sqrt{-1}} + e^{-at\sqrt{-1}} = 2\cos.at$

$$y = \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - k}\cos.at\,.$$

La frazione $\frac{p}{\Lambda - \lambda}$ che rappresenta il rapporto del peso comprimente alla corrispondente costipazione è il coefficiente costante che moltiplicando il raccorciamento variabile dell' elice dà l' espressione della forza elastica. Rappresentando con ε questo rapporto che è porporzionale alla forza d' elaterio della diversa spirale, e ponendo per y, ed a i loro valori nella precedente equazione, risulta

$$(14) \qquad \Lambda - z' = \Lambda\, k \cos.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$$

la quale equazione ci darà l' altezza della spirale in ogni istante.

Viceversa sarà

$$(15) \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2g\varepsilon}}\,\text{arc. cos.}\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$$

e con questa equazione conosceremo il valore del tempo che impiega l' elice ad arrivare ad una data altezza.

Per avere il valore della velocità $\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ dell'ultimo punto dell' elice si differenzi l' equazione (14), avremo

$$(16) \qquad \left(\frac{dz'}{dt}\right) = (\Lambda - k)\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\ \sin.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$$

equazione che ci darà il valore della detta velocità pel tempo. Se si volesse il valore della medesima espresso per la lunghezza dell'elice, ricavando il valore di $\sin.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$ dall' equazione (14) e sostituendolo in questa, si troverà

$$(17) \quad \left(\frac{dz'}{dt}\right) = \sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\left[(\Lambda - k)^2 + (\Lambda - z)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

6. Corol. I. Se nell' equazione (13) si fa $z' = \Lambda$, rimane $\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = 0$, questo valore di z' che annulla la differenziale della velocità $\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ è quello che nel nostro caso corrisponde alla velocità massima. La spirale adunque avrà acquistata la massima velocità quando sarà giunta a quell' altezza che ha naturalmente non essendo aggravata da alcun peso. Il valore di questa velocità massima ci sarà dato dall' equazione (17) facendo in essa $z' = \Lambda$, e chiamando v questa velocità, risulterà

$$(18) \qquad v = \sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\,.\,(\Lambda - k)$$

la quale equazione ci fa vedere che la massima velocità è proporzionale alla costipazione iniziale dell' elice.

Il tempo che impiegherà l' elice ad acquistare questa velocità massima si otterrà dall'equazione (15) ponendo in essa $z' = \Lambda$, e sarà, indicandolo con τ,

$$(19) \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{2g\varepsilon}}\,.\,\frac{\pi}{2}.$$

Questo valore del tempo essendo indipendente dalla quantità k, ne segue che, qualunque sia stata la lunghezza alla quale

colla compressione fu ridotta l' elice quando cominciò a scattare, riacquisterà la lunghezza Λ che ha nel suo stato naturale sempre nello stesso tempo, ossia l' elice sarà tantocrona nell' acquistare la sua lunghezza naturale. È un canone stabilito dal gran Newton che vi è tautocronismo ogni qualvolta la forza acceleratrice sia proporzionale allo spazio che rimane a percorrersi onde si annulli. Seguendo questo canone avressimo potuto riconoscere questa proprietà nella dilatazione della nostra spirale, perchè la forza acceleratrice del punto estremo e libero della medesima espressa da $\frac{2g\varepsilon}{m}(\Lambda - z')$ è veramente proporzionale allo spazio che gli rimane a descrivere per riacquistare il suo sito naturale: così quel principio serve di conferma all' enunciato risultamento.

7. Scolio. Non abbiamo considerato il movimento dell' elice che nel tempo del primo scatto, la minima riflessione però sulle equazioni (14), (15), (16) ci mostra che l' elice ad eguali intervalli di tempo pari a quello che quì sopra abbiamo indicato con τ, acquista successivamente le lunghezze.

$$\Lambda \quad , \quad 2\Lambda - k \quad , \quad \Lambda \quad , \quad k$$

e le velocità

$$v \quad , \quad 0 \quad , \quad - v \quad , \quad 0$$

ossia l' elice fa una serie di oscillazioni isocrone a quelle di un pendolo cicloidale il cui circolo generatore abbia per raggio $\frac{m}{8\varepsilon}$.

8. Corol. II. Se invece, come nel risoluto problema abbiamo supposto che la spirale si dilatasse liberamente senza avere alcun corpo avanti a se, vi si ritrovasse un corpo della massa M, è facile il vedere come nell' estendere l' integrale (9) avrebbe dovuto aggiungersi al primo membro dell' equazione (12) il termine $M\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$; così pure, denominando ω il seno dell' angolo che l' asse dell' elice fa coll' orizzonte, dal secondo membro dell' equazione (13) avrebbe dovu-

to sottrarsi il termine $g\omega M$ che rappresenta il peso relativo del corpo M, onde quell' equazione avrebbe presa la forma

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}-g\omega M.$$

Si faccia

$$M+\frac{m}{2}=\frac{\mu}{2},\ \frac{\omega}{\varepsilon}=\gamma,\ \Lambda-\gamma M=\Lambda',\ \lambda-\gamma M=\lambda'$$

la precedente equazione diverrà

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\frac{\Lambda'-z'}{\Lambda'-\lambda'}$$

la quale è tutto simile alla (13), e va estesa nelle integrazioni fra i medesimi limiti. Cambiando perciò nelle equazioni (14), (15), (16) m in μ, Λ in Λ', λ in λ', e sostituendo $M+\frac{m}{2}$ a $\frac{\mu}{2}$, $\Lambda-\gamma M$ a Λ', $\lambda-\gamma M$ a λ', si avrà

$$(20)\quad \Lambda-\gamma M-z'=(\Lambda-\gamma M-k)\cos.t\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$(21)\quad t=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}.\ \mathrm{Arc.\,cos.}\frac{\Lambda-\gamma M-z'}{\Lambda-\gamma M-k}.$$

$$(22)\quad \left(\frac{dz'}{dt}\right)=(\Lambda-\gamma M-k)\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\sin.t\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$(23)\quad \left(\frac{dz'}{dt}\right)=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\left[(\Lambda-\gamma M-k)^2-(\Lambda-\gamma M-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Così pure la massima velocità dell'estremità libera dell'elice sarà data dall'equazione

$$(24)\quad v=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}(\Lambda-\gamma M-k)$$

il qual valore corrisponderà anche a quello della velocità colla quale verrà scagliato il corpo M se sarà posto semplicemente avanti all' elice senza esservi unito. Questa velocità sarà acquistata dall' elice nel momento che la sua lunghezza diverrà eguale a Λ', dal che si vede che, se la spirale ed il

corpo M saranno collocati in un cannone, la lunghezza più avvantaggiosa da darsi al cannone per scagliare il corpo M, deve esser tale, che quando l' elice ha la lunghezza Λ', il centro di gravità del corpo M si trovi alla bocca del medesimo.

Il tempo per acquistare la massima velocità, sarà

$$(25)\quad \tau = \frac{\sqrt{M + \frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

il quale trovasi indipendente dalle quantità k, e γ, ossia dallo stato iniziale dell' elice compressa, e dalla gravità relativa del corpo M, perciò i tempi per acquistare la velocità massima, o sia la lunghezza Λ', saranno sempre tautocroni, qualunque sia la lunghezza iniziale dell' elice, e l' inclinazione del suo asse.

9. Scolio II. Per dare un saggio dell' uso di queste formole le applicherò alla valutazione delle altezze alle quali il Sig. Giovanni Bernoulli lanciò una palla di rame per mezzo del suo *strumento ballistico* della cui teorica e pratica si è occupato nella precitata Memoria. Questo istromento consisteva principalmente in un cannone di rame in cui era collocata quella spirale che servì agli esperimenti riferiti al numero 5. Il peso della spirale era di $\frac{15}{512}$ di libbra; all' estremità libera della medesima era attaccato un tampone del peso di $\frac{3}{256}$ di libbra, e la palla di rame scagliata negli esperimenti pesava $\frac{5}{64}$ di libbra.

Sarà adunque $\qquad M = \frac{3}{256} + \frac{5}{64} = \frac{23}{256}$.

$$m = \frac{15}{512};$$

e dai dati del numero 5. si ricaverà $\qquad \varepsilon = \frac{24}{161}$.

Quindi se la spirale sarà situata verticalmente si

avrà $\gamma = \frac{161}{24}$;

e se sarà inclinata all' orizzonte di 45 gradi, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{161}{24}$.
Sostituendo questi valori nell' equazione (24), che si può mettere sotto la forma

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{M + \frac{m}{2}} (\Lambda - \gamma M - k)^2$$

si ha per la spirale posta verticalmente.

$$\text{I} \quad \frac{v^2}{2g} = 0,7133036\,(\Lambda - k - 0,60)^2$$

e per quando è inclinata di 45°.

$$\text{II} \quad \frac{v^2}{2g} = 0,7133036\,(\Lambda - k - 0,43)^2.$$

Dai principii della teorica del moto accelerato dei gravi si sa, che il primo membro nella prima di queste equazioni rappresenta l' altezza a cui un grave dotato della velocità v può salire, e nella seconda la metà della distanza orizzontale a cui il grave può essere lanciato: dando perciò nel secondo membro a $\Lambda - k$ i particolari valori avremo le altezze, o le semi-amplitudini a cui giungerà la palla scagliata.

La prima colonna della tavola seguente rappresenta i valori di $\Lambda - k$, ossia le costipazioni date alla spirale, la seconda le corrispondenti altezze a cui deve giungere secondo la formola I, la terza le altezze che sono date dalla teorica di Giovanni Bernoulli (*), la quarta le altezze osservate cogli esperimenti. La 5,^{ta} 6ta, e 7ma colonna rappresentano nello stesso ordine le amplitudini, o distanze orizzontali a cui l' *istromento ballistico* dovrebbe lanciare, o ha lanciato la palla essendo inclinato all' orizzonte di 45°.

(*) Per un errore di calcolo numerico le altezze che trova quest' Autore secondo la sua teorica sono diverse dalle riferite; io le ho poste quì calcolate esattamente, perchè se ne possa instituire il confronto con quelle delle nuove formole.

Costipazioni iniziali in linee	Altezze secondo la formola I	Altezze secondo la teorica di Bernoulli	Altezze osservate negli esperimenti	Amplitudini secondo la formola II	Amplitudini secondo la teorica di Bernoulli	Amplitudini osservate negli esperimenti
6′, 5	2.^{p} 1^l	3.^{l} 3′	2.^{p} 0′	4.^{p} 4′	6^p. 6′	4^p
13,	9. 2	11. 9	7 6	18. 10	23. 6	15
19, 75	21. 8	27. 2	16. 6	44. 4	54. 4	33
26, 75	40. 6	48. 6	26. 6	82. 4	97. 0	62
34, 50	68. 4	78. 7	45. 0	137. 10	157. 2	94
40, 25	93. 3	105. 5	60. 6	188. 7	210. 10	144

Il tempo che somministra la formola (25) per tutti questi scatti è 1‴, 2, quindi appare la necessità di una somma prontezza nel porre in libertà la spirale perchè non venghi il suo moto nel principio ritardato o turbato.

La spirale del Sig. Bernoulli era fatta di più barre d'acciajo accoppiate insieme a quattro a quattro, e legate con un filo metallico; in seguito alla descrizione del suo elastro quest' autore soggiunge. *On sentira d'abord quelle différence il doit y avoir pour l' effet tant' d' intensité que d' uniformité entre un ressort fait d' une seule piéce et mince, et d'autres tels que ceux dont j' ai été obligé de me servir ici.* Pare appunto che si debba principalmente da ciò ripetere la maggiore aberrazione dei risultamenti del calcolo nelle ultime esperienze, perchè in queste più che nelle prime devono rendersi, per le forti costipazioni, sensibili i diffetti dell'elastro. D' altronde nel calcolo sono stati trascurati gli attriti, e la resistenza dell'aria che possono diminuire di qualche cosa la velocità della palla.

PROBLEMA II.

10. „ Una fibra diritta ed elastica fissa con un' estremità
„ in un ostacolo immobile, essendo stata troppo stirata, si
„ accorci o si ristringa in virtù del suo elaterio: cercansi,
„ nella ipotesi che la fibra si costipi uniformemente, o sia
„ che le velocità dei diversi punti siano proporzionali alle
„ loro distanze dall' estremità fissa, le relazioni tra gli elemen-
„ ti del moto in questa costipazione?

Sia a^2 l' area di una sezione normale alla lunghezza della fibra

Δ la densità della medesima alla fine di un tempo t.

z la distanza di un punto qualunque dall' estremità fissa nello stesso istante.

z' quella dell' estremità libera.

$\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sarà la velocità del primo punto z.

$\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ quella del secondo punto o dell' estremità libera.

$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ sarà la forza acceleratrice del primo.

$\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$ quella del secondo dei detti punti.

Sia f la somma delle forze acceleratrici sollecitanti la porzione di elastro compresa tra l' estremità fissa, e l' ascissa z; la somma delle forze acceleratrici, dalle quali sarà animata la porzione di elastro $z+\omega$, si avrà considerando f funzione di z, e ponendo $z+\omega$ in luogo di z; sviluppando in seguito la funzione f col teorema di Taylor sarà

$$f+\omega\left(\frac{df}{dz}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)+\text{ ec.}$$

onde la somma delle forze acceleratrici sollecitante la porzione di fibra corrispondente alla parte d' ascissa ω risulterà

$$(26)\qquad \omega\left(\frac{df}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)+\text{ ec.}$$

S' immagini ora una forza acceleratrice media A dalla quale essendo animata tutta la porzione ω di elastro ne risulti una forza eguale alla somma delle forze acceleratrici della serie (26); è evidente che questa forza acceleratrice dovrà essere della forma $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \omega Z$ essendo Z una funzione di z, ω, e t tale che quando ω è eguale a zero non diventi infinita, perchè in tal caso la forza acceleratrice A deve diventare quella del punto dell' elastro corrispondente all' ascissa z, ossia $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$: moltiplicando questa forza acceleratrice media per la massa corrispondente alla lunghezza ω, espressa da $\Delta a^2 \omega$, dovremo per la supposizione fatta avere l' equazione

$$\Delta a^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \omega Z \right] = \omega \left(\frac{df}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right) + \text{ec.}$$

la quale evidentemente non può sussistere per qualunque valore di ω se non è

$$(27) \qquad \Delta a^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right).$$

Sia s la distanza del punto z dall' estremità fissa allorchè la fibra è nel suo stato naturale, per la supposizione che le velocità dei diversi punti della fibra siano in ragione delle distanze dall' estremità fissa, l' ascissa z d' un punto indeterminato della fibra potrà essere espressa dalla formola

$$(28) \qquad z = e\, s$$

ove la quantità e varia soltanto col tempo, ed s passando da un punto all' altro della fibra.

Parimenti indicando con Λ la lunghezza dell' elastro nel suo stato naturale, l' ascissa dell' ultimo punto, o dell' estremità libera sarà data dall' equazione

$$(29) \qquad z' = e\, \Lambda.$$

Quindi se si osserva che nella supposizione di a^2 costante le densità della fibra nei diversi istanti devono essere proporzionali alle rispettive lunghezze della medesima, detta D la densità della fibra nel suo stato naturale, sarà

$$D : \Delta : : \Lambda : z'$$

ossia

$$(30) \qquad \Delta = e\,\mathrm{D}\,.$$

Poniamo ora nell'equazione (27) per z e Δ i valori testè dati, riflettendo che la differenziale di f è relativa soltanto alla variabilità di s, si avrà

$$\mathrm{D}\,\alpha^2 s\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right).$$

Integrando quest'equazione relativamente ad s ed estendendo l'integrale da $s = 0$ a $s = \Lambda$, si ottiene

$$(31) \qquad \mathrm{D}\alpha^2\,\frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = f.$$

In quest'ultima equazione f rappresenta la somma di tutte le forze acceleratrici agenti sull'elastro, ossia il complesso delle forze dalle quali è accelerato il movimento di tutte le particelle dell'elastro. Da questo complesso di forze risulta la forza elastica colla quale la fibra tende a rimettersi nel suo stato: valutando quindi questa forza elastica cogli esperimenti riferiti al numero 5. e ritenendo le denominazioni in tal numero usate, avremo l'equazione

$$\mathrm{D}a^2\,\frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = gp\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Si elimini da quest'equazione la e per mezzo di quella segnata (29) osservando che la quantità $\mathrm{D}\,\alpha^2\,\Lambda$ esprime la massa dell'elastro la quale è costante, e che rappresenteremo con m si otterrà

$$(32) \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = gp\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Quest'equazione è la medesima che quella segnata (13), che al numero 5. abbiamo visto rappresentare il moto oscillatorio d'un'elice; quindi, dovendo anche nel presente caso estendersi nelle integrazioni fra i medesimi limiti, avremo per la soluzione completa del problema le stesse equazioni (14), (15), (16), (17) ec. che servono per la spirale. Se adunque immaginiamo che la massa della spirale sia uniformemente concentrata nell'asse così che quest'asse divenghi una fibra elastica della stessa lunghezza e della stessa forza dell'elice, è evidente

che potremo ridurre l' esame dei movimenti della spirale a quelli di questa fibra omogenea e continua, e saremo certi che i risultamenti che si deducono per questa fibra fittizia sostituita saranno egualmente applicabili alla spirale. Ho creduto bene di dimostrare con esattezza la legittimità di questa sostituzione nelle ipotesi adottate, perchè essa gratuitamente assunta servì già di fondamento ai calcoli dei Bernoulli e di altri.

11. Corol. I. Qualora la fibra avesse attaccato alla sua estremità libera un corpo di massa M non pesante, così che nell' accorciarsi dovesse strascinare seco questo corpo, è facile il vedere che il primo membro dell' equazione (31) avrebbe in questa circostanza richiesto l' aumento del termine $M\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$ per cui anche l'equazione (32) diverrebbe

$$(33) \qquad \left(M+\frac{m}{2}\right)\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\,\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}.$$

Quest' equazione in null' altro differisce da quella segnata (13) del numero 5. se non in ciò, che quì $M+\frac{m}{2}$ tien luogo di $\frac{m}{2}$.

Dunque sostituendo $M+\frac{m}{2}$ ad $\frac{m}{2}$ in tutte le equazioni (14), (15), (16), (17), (18) e (19), avremo per la risoluzione del problema nel presente caso le seguenti

$$\Lambda-z=(\Lambda-k)\cos.\frac{t\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$t=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}\text{ Arc. cos. }\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}.$$

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)=(\Lambda-k)\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\sin.\frac{t\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\left[(\Lambda-k)^2-(\Lambda-z)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$v=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}(\Lambda-k), \qquad T=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}\,\frac{\pi}{2}.$$

12. Scolio. Dinotiamo più generalmente la forza di elasticità $gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$ la quale in questo caso è negativa, colla lettera $-\rho$, e facciamo altresì $\Lambda - z' = x$, l'equazione precedente (33) diverrà

$$(\mathrm{M} + \tfrac{m}{2}) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) = \rho \,.$$

Quindi moltiplicando un membro e l'altro per $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ ed integrando si avrà

$$(\mathrm{M} + \tfrac{m}{2}) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2 \int \rho \, dx \,.$$

Sia rappresentato l' elastro nel caso presente dalla retta AB, è sia Bb lo spazio in fine del quale la forza di elaterio è nulla. Rappresentando colla retta BF la forza ρ al principio del moto, e costruendo la curva bBF nella quale le coordinate CD, cd corrispondono alle forze di elaterio negli istanti ne' quali il punto B ritrovasi in C, c, sarà $\int \rho dx$ eguale all' area BFb, dunque scrivendo u per la velocità $\left(\frac{dx}{dt} \right)$, si avrà

$$(34) \qquad (\mathrm{M} + \tfrac{m}{2}) \, u^2 = \mathrm{BF}b$$

dove quì l'eguaglianza è posta per la proporzionalità. Il Conte Giordano Riccati nel suo Trattato delle corde o fibre elastiche schediasma I. numero VII. proponendosi lo stesso problema dopo aver fatta la medesima costruzione prosiegue così, *egli è facile a concepire che l' aja triangolare* bFB *pareggia l' intiera azione delle forze sollecitanti. Ora a quest' azione s' eguaglia l' aggregato delle forze vive acquistate e dal peso stirante* M *e dalle menome particelle che compongono la corda* „ Essendo la forza viva del corpo M eguale ad Mu^2 ed avendo trovata quella dell'elastro eguale ad $\frac{m}{3} u^2$, stabilisce perciò l' equazione

$$(\mathrm{M} + \tfrac{m}{3}) \, u^2 = b\mathrm{BF}$$

colla quale al numero VIII conchiude che un elastro matè-

matico AB che avesse concentrato nell' estremità B un terzo della massa dell'elastro fisico e materiale AB, caricati amendue del corpo M, sarebbero dotati in luoghi analoghi della stessa velocità, percorrerebbero gli stessi spazii, e quindi sarebbero isocroni nelle loro oscillazioni. L' eguaglianza (*a*) che l'Autore ha posto venendo contraddetta e provata fallace dalla sovrascritta equazione (34), nella quale m è soltanto divisa per 2, ne risulta conseguentemente erroneo l' esposto teorema che Giovanni e Giacomo Bernoulli i giovani, Nicolai, ed altri hanno pure adottato in seguito. (*)

Se si volesse dedurre dall' equazione (34) un consimile teorema a quello del Riccati, si vedrà facilmente collo stesso ragionamento che l' elastro matematico avrà tutti i suoi movimenti eguali a quello del fisico, e sarà per conseguenza isocrono collo stesso, se nella sua estremità B avrà concentrato la metà della massa dell' elastro fisico e materiale AB.

(*) Anche il Prof. *Francesconi* in una sua Memoria sulla *Teoria della Resistenza de' corpi molli* ha fatto uso di questo teorema; all' oggetto però che se ne serve, deve essere per lui indifferente il sostituire la metà al terzo della massa risultandone in massima le stesse conseguenze.

DELLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE A SEMPLICE CURVATURA

OPUSCOLO

Del Sig. Paolo Ruffini (*)

MEMORIA II.ª

Affezioni delle Curve Algebraiche a distanze finite

CAPO I.º

Della natura dei Rami, che nelle Curve algebraiche scorrono all' infinito, dei loro Assintoti, dei loro Diametri, e dei Punti conjugati.

37. Si esprima con l'Equazione $f(x, y) = 0$ (n.° 1) una Curva qualunque algebraica di grado m. Osservo, se in essa Equazione esistono attualmente le due potenze x^m, y^m, o non vi esistono; se vi si contengono prendo tale Equazione, come si trova; e se vi mancano o amendue, od una sola, trasformo l'Equazione medesima in un'altra, la quale le contenga entrambe, e la quale rappresenti la Curva stessa, cangiate semplicemente le coordinate. Tale trasformazione sappiamo dai metodi generali di permutare le coordinate potersi sempre eseguire, col porre due quantità $m + nx + py$, $m' + n'x + p'y$ in vece rispettivamente delle x, y, nelle quali i coefficienti m, m', n, n', ec. siano opportunamente determinati.

In conseguenza di ciò supporremo costantemente, che la data $f(x, y) = 0$ contenga amendue le potenze x^m, y^m, e però che venga espressa dall' Equazione (III) (n.° 1.), nella quale i coefficienti a, $a^{(m)}$ siano sempre diversi dallo zero.

38. Svolgasi la Equazione $f(x, y) = 0$ ora supposta in

(*) La Memoria I del presente Opuscolo trovasi alla pag. 69. di questo Volume.

una serie discendente, per mezzo della quale si esprima il valore di y per x. Pel dimostrato nel (n.° 3.) tal serie sarà in generale la (I), ove si avrà $\alpha = 1$, ed il coefficiente L necessariamente diverso dallo zero, e si avrà $1 > \beta > \gamma > \delta >$ ec. (n.° 1.) Relativamente agli m valori particolari di y avremo le m serie particolari (II) dove sarà $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' =$ ec. $= \alpha^{(m)} = 1$.

39. Essendo le (I), (II) serie discendenti (n.° prec.), esprimeranno prossimamente i rispettivi valori di y, mentre sia x grande, e tanto più esattamente quanto x è più grande. Dunque le serie medesime potranno determinare prossimamente i punti, od i rami della Curva espressa dalla $f(x, y) = 0$, mentre questi punti o rami esistono ad una distanza notabile dal principio delle x; e questa approssimazione sarà tanto più esatta, quanto l'accennata distanza è maggiore.

40. Esistano nella supposta Curva della $f(x, y) = 0$ punti ad una distanza infinita. In questa ipotesi io dico, che i valori corrispondenti dell'ascissa x deggiono essere tutti infiniti. Imperciocchè se ciò non si volesse, posto finito uno di questi valori; per la distanza infinita dal principio degli assi delle coordinate del punto corrispondente, dovendo poi essere certamente infinito il rispettivo valore della y, collocato questo valore non infinito della x, e l'infinito della y nella Equazione (III), ove il coefficiente $a^{(m)}$ è diverso dallo zero (n.° 37.), essa diverrebbe $a^{(m)} y^m = 0$; ma tale Equazione risultata è assurda. Dunque ec.

41. Abbiasi nella (I) oltre l'esponente $\alpha = 1$ (n.° 38.) l'altro $\beta = 0$, onde essa divenga $y = Lx + M + Nx^\gamma + Px^\delta +$ ec. Trasportati i termini Lx, M nel primo membro, suppongo $y - Lx - M = u$, ed $x = \frac{z}{E}$, ove, chiamato μ l'angolo delle coordinate x, y sia $E = \sqrt{(1 + 2L\cos.\mu + L^2)}$ dai principj della Teorica delle Curve sappiamo, che sostituendo in luogo delle x, y i valori, che rispettivamente ne vengono in z ed u, la Equazione $f(x, y) = 0$ trasformasi perciò in un'altra, che dirò $\phi(z, u) = 0$, la quale esprime

la medesima Curva, cangiatine semplicemente gli assi delle coordinate, e la precedente serie si cambierà nella

(XXXV) $u = N \frac{z^{\gamma}}{E^{\gamma}} + P \frac{z^{\delta}}{E^{\delta}} + ec.,$

la quale rappresenterà con altre coordinate il ramo stesso della stessa Curva, che viene rappresentato dalla

$y = Lx + M + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + ec.,$

42. Sia l'esponente β diverso dallo zero. Ritenuto $E = \sqrt{(1 + 2 L \cos. \mu + L^2)}$ ed $x = \frac{z}{E}$, faccio in questa ipotesi $y - Lx = v$, ed ottenuta come precedentemente dalla $f(x,y) = 0$ la trasformata $\phi(x,v) = 0$, e dalla $y = Lx + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta}$ la

(XXXVI) $v = \frac{M}{E^{\beta}} z^{\beta} + \frac{N}{E^{\gamma}} z^{\gamma} + \frac{P}{E^{\delta}} z^{\delta} + ec.,$

quì ancora sappiamo non essersi che cangiate le coordinate, rappresentandosi con la $\phi(z, v) = 0$ la stessa Curva e con la (XXXVI) il ramo medesimo Se mai nella (I) si volesse $M = 0$ dalle ipotesi di $y - Lx = v$, e di $x = \frac{z}{E}$, in vece della (XXXVI) avrebbesi la $v = \frac{N}{E^{\delta}} z^{\gamma} + \frac{P}{E^{\delta}} z^{\delta} + ec.$; e siccome anche in questo caso si verificano le precedenti riflessioni, e l'ottenuta serie è simile alla (XXXVI), ne segue, che riducendo questo caso a quello, trascureremo di considerarlo.

43. Ritenuta la stessa linea delle ascisse x, è lo stesso angolo delle coordinate μ, è facile a vedersi, che l'Equazione rappresentante la linea delle ascisse z nel (n.° 41.) sarà la $y = Lx + M$, e nel (n.° 42.) sarà la $y = Lx$.

Supposto, che si abbiano le rette delle due Equazioni $y = L'x + M'$, $y = L''x + M''$, le quali si riferiscano ad una medesima linea delle x, e ad un medesimo angolo delle coordinate; tali rette, se sia il coefficiente L'' diverso dall'altro L' saranno tra loro oblique, e dalla Equazione $L'x + M' = L''x + M''$ ricavandosi $x = \frac{M'' - M'}{L' - L''}$, s'intersecheranno esse cor-

rispondentemente all' ascissa $\frac{M''-M'}{L'-L''}$: se sia $L'=L''$, esse rette saranno tra loro parallele, essendone $M''-M'$ la differenza costante delle ordinate: e se abbiasi finalmente $L'=L''$, $M'=M''$, allora le due rette coincideranno in una sola.

44 Suppongasi la x di valore infinito: divenendo infinita perciò ancora la z (n.° 41.), le precedenti due Equazioni (XXXV), (XXXVI) diverranno $u=\frac{N}{E^\gamma}z^\gamma$, $v=\frac{M}{E^\beta}z^\beta$, e posti in luogo di β, e γ i rispettivi valori $\frac{p}{k}$, $\frac{q}{k'}$ (n.^{i} 18., 30.), avremo le due $u^{k'}=\frac{N^{k'}}{E^q}z^q$, $v^k=\frac{M^k}{E^p}z^p$.

Osservando dover essere $\frac{p}{k}<1$ (n.^{i} 18., 38.), se mai risulta $\frac{p}{k}>0$, l'Equazione $v^k=\frac{M^k}{E^p}z^p$ ci esprimerà la parabola *pesima* del grado *kesimo*: se sia per esempio $k=5$, $p=2$, la risultante $v^5=\frac{M^5}{E^2}z^2$ rappresenterà la seconda parabola del grado quinto. L'Equazione $y=Lx$ ci darà il diametro di tal parabola (n.° 43), su del quale si prendono le ascisse z, ed al quale terminano le ordinate v (n.° 42.). Che se si abbia $\frac{p}{k}<0$, posto $-p$ in vece di p risultandoci $v^k=\frac{M^k E^p}{z^p}$, avremo così l'Equazione di un'Iperbola accostantesi, come ad assintoto, alla retta dell' Equazione $y=Lx$ (n.° 43.), retta alla quale si rapportano le coordinate z, v. Tale iperbola dalla comune de' Geometri si considera del grado $(k+p)$ *esimo*; ma siccome nel caso nostro deve essa considerarsi soltanto riguardo ai rami che hanno per assintoto la retta delle ascisse z, e a cagione degli usi che ne esporremo in seguito, converrà a noi meglio stabilire, che ne venga determinato il grado, come si pratica relativamente alle parabole, solamente dall' esponente k, e che l'esponente p dell' ascissa z ne determini la specie: porremo perciò, che la Equazione $v^k=$

$\frac{M^k E}{z^p}$ esprima l'Iperbole *pesima* del grado *kesimo*. Nel caso finalmente, in cui sia $p = o$ dovendo considerarsi la (XXXV) (n.° 41.), e quindi nella ipotesi di x infinita la $u^{k'} = \frac{N^{k'}}{E^q} z^q$; rifletto che a cagione di $\gamma < \beta$ (n.° 38.) dovendo nella ipotesi presente essere $\frac{q}{k'} < o$, e però q quantità negativa; collocato $-q$ invece di q, essa Equazione diventando $u^{k'} = \frac{N^{k'} E^q}{z^q}$ rappresenterà sempre una Iperbole, e questa secondo l'esposta maniera di concepire, sarà l'Iperbola *qesima* del *k'esimo* grado. La linea poi delle ascisse z, a cui terminano le ordinate u, sarà suo assintoto, e sarà determinata dall'Equazione $y = Lx + M$ (n.^{i} 41., 43.).

45. Descritte le Curve delle Equazioni $v = \frac{M}{E^\beta} z^\beta$, $u = \frac{N}{E^\gamma} z^\gamma$ siano esse parabole od iperbole (n.° prec.); poichè riduconsi a tali Equazioni nella supposizione di $z = \infty$ le (XXXV) (XXXVI), apparisce, che se la Curva data della Equazione $f(x,y) = o$ ha rami estendentisi all'infinito, questi si avvicineranno sempre oltre qualsivoglia distanza assegnabile ad altrettanti rami delle suddette parabole, od iperboli, accostandosi riguardo alle iperboli soltanto a quelli dei loro rami, che si estendono all'infinito corrispondentemente agli aumenti della z. Vedendo per tal modo i Geometri, che i rami di una Curva qualunque, allorchè scorrono all' infinito si accostano viemaggiormente ad acquistare l' indole dei rami di parabole o d' iperboli, hanno convenuto di denominare essi rami parabolici rispettivamente od iperbolici, e di tal grado e specie, quale è il grado e specie delle parabole e delle iperboli corrispondenti.

46. Potendo i valori di L nella (VII) (n.° 4.) essere reali, ed immaginarj; cominciam dal supporre il valore L' immaginario, e sia L'' l' altro valore immaginario, che per la na-

tura degli immaginarj deve in corrispondenza esistere nella (VII). In conseguenza di questa supposizione risultando immaginarj i termini $L'x$, $L''x$, qualunque valore reale diverso dallo zero attribuiscasi alla x; saranno nelle (II) immaginarj eziandio i corrispondenti valori y', y'', e quindi la Curva non avrà rispettivamente ne' rami ne' punti esistenti a distanze infinite. Perciò se tutte le radici della (VII) sono immaginarie, la Curva della $f(x,y)=0$ si restringerà tutta entro uno spazio finito, corrispondentemente cioè a quei valori della x, i quali non possono nè esattamente nè per approssimazione far verificare le Equazioni (II) (n.° 39.). Quando poi nelle stesse (II) i valori della y in corrispondenza a quelli della L si vogliano immaginarj in parte, ed in parte reali, i valori immaginarj accaderanno sempre a due a due, e però sempre di numero pari.

47. Sia in secondo luogo L' reale, e disuguale da tutti gli altri valori della L. Risultando in questa ipotesi pel (n.° 6.) reali ancora tutti i coefficienti M' N', ec. e interi tutti gli esponenti α', β', γ', ec.; ne segue, che nelle (II) sarà reale eziandio il valore y', onde la Curva avrà in corrispondenza rami infiniti. Per essere poi $\alpha'>\beta'>\gamma'>$ ec. (n.° 1.) ed $\alpha'=1$ (n.° 3.), tali rami saranno iperbolici di 1.° grado (n.^{i} 45., 44.) inoltre denominato v' il valore di v (n.° 42.) che corrisponde ad L', ed u' il valore di u (n.° 41.), che corrisponde ai valori L', M', cosicchè si abbia $v'=y-L'x$, $u'=y-L'x-M'$, e chiamato E' il valore di E (n.° 41.) che corrisponde ad L' la Equazione $v'=\frac{M'E'^p}{z^p}$ allorchè non sia $\beta'=0$, e quando si abbia $\beta'=0$ l'altra $u'=\frac{N'E'^q}{z^p}$ esprimeranno le iperboli, alle quali gli accennati rami si avvicinano (n.° 44.); tanto p quanto q potranno avere uno dei valori $1, 2, 3$ ec. $m-1$ (n.^{i} 28., 1.° n.° 30.); dalla $y=L'x$, oppur dalla $y=L'x+M'$ verrà pel citato (n.° 44.) determinato il rispettivo assintoto; e tale assintoto sarà pel (n.° 43.) obbliquo a tutti gli assintoti,

e diametri di tutti gli altri rami iperbolici, e parabolici, che esister possono nella nostra Curva.

48. Si ponga L' reale uguale ad L'', e disuguale da tutti gli altri valori di L. In questa supposizione i due successivi coefficienti M', M'' dipendenti dal valore $L' = L''$ potranno risultare immaginarj e reali, uguali e disuguali fra loro. Siano in primo luogo reali, e fra loro disuguali. Nel valore di $\beta = \frac{p}{k}$ (n.° 18.) potendo in questo caso k avere i valori 1, 2, cominciam dal supporre $k = 1$. Nell'Equazione generica $v^k = \frac{M^k}{E^p} z^p$ del (n.° 44.) fatto, come nel (n.° prec.) $y - L'x = v'$, denominato E' il valore di E, che corrisponde ad L', ed a cagione di $k = 1$, e però di $\frac{p}{k} = \frac{p}{1}$ non > 1 (n.° 38.) collocato nel caso di p non $= 0$, come nel citato (n.° 44.) $-p$ in vece di p, otterremo le due $v' = \frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$, $v' = \frac{M''E'^{p''}}{z^{p''}}$. Dunque, mentre sia p diverso dallo zero, esprimendosi da queste Equazioni due iperboli di 1.° grado; ai rami delle medesime, che hanno per assintoto l' asse delle z, si avvicineranno all' infinito rispettivamente quattro rami della Curva data. Pel (n.° 28.) potrà p avere uno dei valori 1, 2, 3, ec. $m - 2$; ed a cagione di aversi in amendue la stessa v', gl' indicati quattro rami iperbolici si accosteranno tutti ad un medesimo assintoto, cioè alla sola retta della Equazione $y = L'x$ (n.° 44.). Che se sia $p = 0$; allora supposto a norma del (n.° prec.) $y - L'x - M' = u'_1$, $y - L'x - M'' = u'_2$, ritenuto E' valore di E corrispondente ad L', ed a cagione di l (n.° 29.) nel caso presente $= 1$, dovendo nel valore $\gamma = \frac{q}{k'}$ (n.° 30.) risultare $k' = 1$, e q per essere < 0 (n.° 38), di valor negativo, collocato $-q$ in vece di q, l' Equazione generica $u^{k'} = \frac{N^{k'}}{E^q} z^q$ diverrà in corrispondenza

$u'_1 = \frac{N'E'^{q'}}{z^{q'}}$, $u'_2 = \frac{N''E'^{q''}}{z^{q''}}$. Dunque quì ancora risultando le Equazioni di due iperbole di 1.° grado, ad esse iperbole si accosteranno, come di sopra, quattro rami della data Curva. Quivi però tali rami a due a due si avvicineranno pel (n.° 43.) a due assintoti paralleli fra loro, tra loro distanti della quantità $M''-M'$, e determinati dalle Equazioni $y - L'x - M' = 0$, $y - L'x - M'' = 0$. A cagione finalmente di $h = 2 = n$ (n.i 29, 15.) q potrà avere uno dei valori 1, 2, 3, ec. $m-2$.

49. Abbiasi $k = 2$; dovendo in questo caso essere $\beta' = \beta'' = \frac{p}{2}$, ed M', M'' essere radici della Equazione $M^2 = H$ (n.i 18, 19.), dall' Equazione generica $v^k = \frac{M^k}{E^p} z^p$ (n.° 44.), ritenute le denominazioni del (n.° 47.) otterremo $v'^2 = \frac{H}{E'^p} z^p$, dove p potrà avere i valori 1, 0, -1, -2, -3, ec. $-(m-2)$.

Sia $p = 1$. La $v'^2 = \frac{H}{E'} z$ esprimendo una parabola Apolloniana; ai rami di essa si accosteranno all' infinito due rami della Curva data, e la retta dell' Equazione $y - L'x = 0$ ne sarà il diametro (n.° 43.).

Che se si ponga p uguale ad uno dei numeri -1, -2, -3, ec. allora, cambiato esso p in $-p$ ne verrà la $v'^2 = \frac{HE'^p}{z^p}$ esprimente un' iperbola di 2.° grado, che avrà per assintoto la retta $y' - L'x = 0$, ed ai rami di questa, che hanno l'accennato assintoto, avvicinansi i due rami della data Curva.

Se in fine si abbia $p = 0$: per essere M', M'' radici della $M^2 = H$, e però disuguali fra loro; sarà nel (n.° 29.) $h = 2$, $l = 1$, quindi nel valore di $\gamma = \frac{q}{k'}$ (n. 30.) avremo $k' = 1$, e per essere $q < 0$ (n.° 38.) posto $-q$ in vece di q, e ritenute rapporto ai valori di u le denominazioni del (n.° 48.),

si avranno le due Equazioni $u'_1 = \frac{N'E^{q'}}{z^{q'}}$, $u'_2 = \frac{N''E'^{q''}}{z^{q''}}$, le quali ci dimostrano avere la nostra Curva quattro rami iperbolici di 1.° grado approssimantisi a due a due agli assintoti fra loro paralleli $y = L'x + M'$, $y = L'x - M'$, potendo q acquistare uno dei valori 1, 2, 3, ec. $m - 2$ (1.° n.° 30.).

50. Corrispondentemente ad $L' = L''$ siano i due valori M', M'' (n.° 48.) immaginarj. Potendo quì ancora k acquistare i valori 1, 2, sia primieramente $= 1$. Diventando in questo caso $\frac{p}{k}$ numero intero (n.° 18.), tanto $M' x^{\beta'}$, quanto $M'' x^{\beta''}$ saranno sempre immaginarj, qualunque valore reale attribuiscasi alla x; e divenendo perciò immaginarj nelle (II) anche i corrispondenti valori y', y'', la Curva non avrà in corrispondenza rami che scorrano all' infinito. Ciò non ostante, siccome quando si pone $x = \infty$, scomparendo le quantità non infinite rapporto alle infinite, le due serie $y' = L'x + M'x^{\beta'} +$ ec. $y'' = L'x + M''x^{\beta''} +$ ec. divengono $y' = L'x$, $y'' = L'x$; e siccome poi in queste Equazioni $y = L'x$, $y'' = L'x$ corrispondentemente ad un medesimo valore reale della x ottienesi uno stesso valore reale di amendue le y', y''; ne segue, che quantunque la nostra Curva non abbia rispettivamente al coefficiente L' ramo veruno che scorra all' infinito, pure potremo considerare, che relativamente allo stesso L' abbia due punti, come dicono *conjugati e doppj* corrispondenti alle due ascisse $x = \infty$ $x = -\infty$, ed esistenti perciò a distanze infinite. Questa considerazione equivale in altri termini ad osservare, che all'aumentarsi sì nel senso positivo, che nel negativo della x, tanto più ci accostiamo, senza potervi mai arrivare, a due punti esistenti sulla retta dell' Equazione $y = L'x$, le coordinate de' quali soddisfacciano all' Equazione $f(x, y) = 0$.

51. Rimanendo i coefficienti M', M'' immaginarj, sia $k = 2$, onde si abbia $\beta' = \beta'' = \frac{p}{2}$ (n.° 18.); M', M'' dovranno esser radici dell' Equazione $M^2 + H = 0$ (n.i 18, 19.); e dalla

$v = \frac{M}{E^{6}} z^{6}$ (n.° 44.) avrem quindi, posto $y - L'x = v'$ (n.° 47.),

$v' = \pm \frac{\sqrt{-H}}{E^{\frac{p}{2}}} z^{\frac{p}{2}}$. Sia p numero dispari: in questa supposizione i due valori di v' saranno immaginarj, ogni qual volta si faccia $z > 0$; ma quando si attribuiscano alla z valori negativi, divenendo reali i due valori $\pm \frac{\sqrt{-H}}{E'^{\frac{p}{2}}} (-z)^{\frac{p}{2}}$, e reali parimenti tutti i termini $M' x^{6'}$, $N' x^{\gamma'}$, ec. $M'' x^{6''}$, $N'' x^{\gamma''}$ ec. delle serie corrispondenti nelle (II), come dimostreremo fra poco, diverranno reali eziandio i rispettivi valori y', y''; e per conseguenza la Curva avrà due rami estendentisi dalla parte delle z, e però delle x negative all' infinito, e approssimantisi ai rami della Curva $v'^{2} = -\frac{Hz^{p}}{E'^{p}}$. Che se sia p numero pari, allora risultando il termine $\frac{\sqrt{-H}}{E'^{\frac{p}{2}}} z^{\frac{p}{2}}$ sempre immaginario, sia il valore di z positivo, o sia negativo, la Curva non avrà punto rami in corrispondenza, che scorrano all' infinito: osservando però, che quando si pone $x = \infty$, si considera, che i termini $M x^{6}$, $N x^{\gamma}$, ec. svaniscano tutti rapporto al primo termine Lx; ne segue, che quì ancora, come si è fatto nel (n.° prec.), potremo stabilire, che esistano a distanze infinite due punti conjugati e doppj corrispondenti all' Equazione $y = L'x$. I valori poi di p venendo compresi pel (n.° 28.) nella serie $1, 0, -1, -2, -3$, ec. $-(m-2)$; quando sia $p = 1$, i rami della Curva si accosteranno a quelli della parabola $v'^{2} = -\frac{H}{E'} z$ avente per diametro la retta $y = L'x$; allorchè p uguagli uno dei numeri dispari $-1, -3$, ec., gl' indicati rami si avvicineranno a quelli della corrispondente iperbole, di cui la retta $y = L'x$ sarà l' assintoto; e quando finalmente p si ugua-

gli ad uno dei numeri pari $0, -2, -4$, ec.; allora si avranno a distanza infinita in corrispondenza soltanto due degli accennati punti conjugati.

Ho detto, che col porre z di valor negativo, siccome risulta di valor reale il termine $\frac{\sqrt{-H}}{E'^{\frac{p}{2}}}(-z)^{\frac{p}{2}}$, mentre si ha p numero dispari, così deggiono risultare reali ancora le due serie, che esprimono i valori delle y', y'' nelle (II). Supposto difatti nella (XXVII) e nella (XXVIII) (n.° 31.) $k=2$, $L'_1=\sqrt{-H}$, ed $x>0$, avremo pel cit° (n.° 31.) $y'=X+X'$, $y''=X-X'$, e questi due valori, qualunque numero positivo si sostituisca in vece della x, saranno sempre immaginarj. Ora posto il valor della x positivo e grande, pel (n.° 39.) esister devono in corrispondenza due radici immaginarie nella data Equazione $f(x, y)=0$ (n.° 1.), e tali radici per la natura degl' immaginarj potranno, qualunque sia il supposto valore della x, ridursi alla forma $Z+Z'\sqrt{-1}$, $Z-Z'\sqrt{-1}$, dove Z, Z sono quantità reali. Dunque, avendosi per approssimazione $X+X'=Z+Z'\sqrt{-1}$, $X-X'=Z-Z'\sqrt{-1}$, col sommare, e col sottrarre queste Equazioni, otterremo prossimamente $X=Z$, $X'=Z'\sqrt{-1}$, e però X sarà quantità reale, ed X' sarà bensì immaginaria, ma riducibile ad una reale moltiplicata in tutti i suoi termini per $\sqrt{-1}$. Ma abbiamo

$X=L'x+M'+N'x^{-1}+P'x^{-2}+$ ec.

$X'=x^{\frac{1}{2}}(L'_1+M'_1x^{-1}+N'_1x^{-2}+$ ec.) (n.° 31.). Dunque tutti i coefficienti L', M', N', P', ec. saranno reali, e gli altri L'_1, M'_1, N'_1, ec. si ridurranno alle forme $a'\sqrt{-1}$, $b'\sqrt{-1}$, $c'\sqrt{-1}$, ec. ove $a'=\sqrt{H}$, b', c', ec. siano quantità reali, ed avremo in tal modo con i coefficienti reali i due valori

$y'=L'x+M'+N'x^{-1}+P'x^{-2}+\text{ec.}+(a'+b'x^{-1}+c'x^{-2}+\text{ec.})x^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$,

$y''=L'x+M'+N'x^{-1}+P'x^{-2}+\text{ec.}-(a'+b'x^{-1}+c'x^{-2}+\text{ec.})x^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$.

Ma posto $-x$ in vece di x, tai valori divengono

$y'=-(L'x-M'+N'x^{-1}-P'x^{-2}+\text{ec.})-(a'-b'x^{-1}+c'x^{-2}-\text{ec.})x^{\frac{1}{2}}$,

$y''=-(L'x-M'+N'x^{-1}-P'x^{-2}+\text{ec.})+(a'-b'x^{-1}+c'x^{-2}-\text{ec.})x^{\frac{1}{2}}$,
i quali sono amendue reali. Dunque, ec.

52. Abbiasi non solo $L'=L''$ (n.° 48.), ma ancora $M'=M''$; in questo caso è chiaro, che $M'=M''$ dovrà essere di valor reale, e non potendo M', M'' essere radici di un' Equazione della forma $M^2=H$, non potrà nel valone $\beta'=\frac{p'}{k}$ risultare $k=2$ (n.° 18.); ed avendosi solamente $k=1$, potrà β' acquistare soltanto uno dei valori $0, -1, -2, -3$, ec. $-(m-2)$ (n.° 28.). Cominciam dal supporre, che abbia esso uno qualunque di tali valori a riserva del primo zero. In questa supposizione cambiato p' in $-p'$, avremo tostamente l' Equazione $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$ esprimenteci un' iperbola di 1.° grado (44), ed avente per assintoto la retta $y=L'x$. Ora si progredisca avanti, ricercando dipendentemente dal coefficiente $M'=M''$, e dall' esponente $\beta'=-p'$ i valori rispettivamente de' coefficienti N', N'', e degli esponenti γ', γ'', i quali a cagione di $\gamma<\beta$ (n.° 38.) dovendo essere negativi, si cangiano in $-\gamma'$, $-\gamma''$. Poichè possono questi N', N'' risultare reali ed immaginarj, uguali e disuguali tra loro, e poichè nel valore generico $\frac{q}{k'}$ (n.° 30.) degli esponenti γ', γ'' mentre q può avere uno qualunque dei valori 1, 2, 3, ec. $(m-2)$ (1.° n.° 30.), deve k' uguagliare soltanto uno dei numeri 1, 2; cominciam dal supporre N', N'' reali, e disuguali fra loro, e $k'=1$. In questa ipotesi risultandoci γ', γ'' numeri interi, e i termini $\frac{N'E'^{\gamma'}}{z^{\gamma'}}$, $\frac{N''E'^{\gamma''}}{z^{\gamma''}}$ tra loro disuguali, nelle due Equazioni $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}+\frac{N'E'^{\gamma'}}{z^{\gamma'}}+\text{ec.}$, $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}+\frac{N''E'^{\gamma''}}{z^{\gamma''}}+\text{ec.}$; ne segue, che la Curva data avrà quattro rami percorrenti all' infinito, i quali corrispondentemente all' assintoto rettilineo $y=L'x$, avvicinansi due per parte ai rami dell' iperbola $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$.

53. Che se, posto $k'=2$, i coefficienti N', N'' radici in tal caso di un'Equazione $N^2=H$ (n.^{i} 18, 19.) rimangono reali e disuguali fra loro: allora, ogni qualvolta sia q numero dispari, la Curva data, a cagione di $z^{\frac{q}{2}}$ reale soltanto quando z sia di valor positivo, avrà non più quattro, ma solamente due rami, che percorrono all'infinito, e questi si avvicineranno al ramo dell'iperbola $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$ dalla parte delle ascisse positive, restando dalla parte delle ascisse negative solamente un punto conjugato doppio determinabile dalla $y=L'x$, col porre $z=-\infty$: se poi si voglia q numero pari, divenendo $\frac{q}{2}$ numero intero, la Curva avrà di nuovo all'infinito quattro rami, come di sopra.

54. Gli accennati valori N', N'' disuguali fra loro siano immaginarj: applicandosi a questo caso, quanto si è detto nei (n.^{i} 50, 51.) rapporto al caso dei valori M', M'' immaginarj, vedremo, che corrispondentemente al valore $L'=L''$ o non esistono a distanze infinite che due punti conjugati doppj corrispondenti alla $y=L'x$, e ciò mentre abbiasi $k'=1$, ovvero mentre posto $k'=2$, sia poi q numero pari; oppure esistono solamente dalla parte delle ascisse negative due rami estendentisi all'infinito, e approssimantisi al rispettivo ramo della iperbole $v'=\frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$, ed un punto conjugato doppio corrispondente a $z=\infty$; e ciò mentre si abbia $k'=2$, e q numero dispari.

55. Sia finalmente $N'=N''$. Dovrà in questa ipotesi essere N' quantità reale, e l'esponente γ' dovrà essere un numero intero e negativo onde porremo $-\gamma'$ in vece di γ'. Dipendentemente dal coefficiente $N'=N''$, e dall'esponente $-\gamma'$ cercando i valori dei coefficienti P', P'', e degli esponenti $-\delta'$, $-\delta''$, e proseguendo innanzi i discorsi, come si è fatto precedentemente riguardo ai valori N', N'', γ', γ'', troveremo in

egual modo, che, quando questi P′, P″ sono disuguali fra loro e reali, e gli esponenti δ', δ'', numeri interi, la Curva data è fornita di quattro rami approssimantisi all' infinito ai rami della Curva $v' = \frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}} + \frac{N'E'^{\gamma'}}{z^{\gamma'}}$, e però a quelli dell' iperbola $v' = \frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$ corrispondentemente all'assintoto $y = L'x$. Quando essi P′, P″ sono immaginarj, e si ha $\delta' = \delta'' =$ numero intero, troveremo, che la data Curva non ha rispettivamente alla $y = L'x$, ed a distanze infinite, che due punti conjugati, come di sopra. Quando finalmente abbiasi $\delta' = \delta'' = \frac{r}{2}$, essendo r un numero dispari, troveremo, che la Curva data ha approssimantisi all' iperbola $v' = \frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$ da una parte due rami, ed ha un punto conjugato doppio dall' altro; ed è quella parte positiva, questa negativa, mentre P′, P″ siano radici di un' Equazione $P^2 = H$, e viceversa è positiva questa, negativa quella, mentre P′, P″ siano radici della $P^2 = -H$.

Si ponga $P' = P''$; e progredendo avanti col ricercare dipendentemente da questo $P' = P''$, e dall' esponente $-\delta'$ i successivi coefficienti Q′, Q″ e gli esponenti $-\zeta'$, $-\zeta''$; come precedentemente, vedremo, che ogni qualvolta Q′, Q″ siano disuguali fra loro, sussiste, che la Curva data relativamente alla solita iperbola $v' = \frac{M'E'^{p'}}{z^{p'}}$ è sempre fornita o di quattro rami percorrenti due per parte all' infinito, o di due rami soltanto da una parte, e dall'altra di un solo punto doppio conjugato posto a distanza infinita, o di due solamente di tali punti collocati uno per parte a distanze infinite. Quando poi si abbia $Q' = Q''$, procederò innanzi, e sempre si troverà, che la Curva data deve rapporto alle distanze infinite, ossia ai valori della z infiniti essere dotata di una delle tre affezioni ora indicate. Avvertasi, che quantunque si voglia, che sia $L' = L''$, $M' = M''$, $N' = N''$, $P' = P''$, $Q' = Q''$, ec., pure si dovrà, an-

dando avanti, giungere necessariamente a due di tali coefficienti, per esempio ai due T', T'', i quali saranno disuguali fra loro (n.° 26.).

56. Restando come nel (n.° 52.) $L' = L''$, $M' = M''$, sia $\beta' = 0$. Si cerchino in questo caso i valori di $N', N'', \gamma', \gamma''$ nel successivo termine Nx^{γ}, e poichè a cagione di essere presentemente $l = h = n = 2$. (n.^{i} 29, 48.) nel valore $\gamma = \frac{q}{k'}$(n.° 30.) può k' ottenere i due valori 1, 2; e q gli altri -1, -2, -3, ec. $-(m-2)$ (1.° n.° 30.); con i discorsi medesimi, che si sono fatti nei precedenti (n.^{i} 48, ec. 54.) vedremo, che, supposto $y - L'x - M' = u'_1$, e collocato $-q$ in vece di q, la Curva data sarà fornita in corrispondenza o di quattro rami avvicinantisi ai rami delle due Iperbole $u'_1 = \frac{N'E'^{q'}}{z^{q'}}$, $u'_1 = \frac{N''E'^{q''}}{z^{q''}}$ (n.° 48.) aventi uno stesso assintoto nella retta dell' Equazione $y = L'x + M'$; oppure di due rami approssimantisi ai rami dell' Iperbola di 2.° grado $u'^2_1 = \frac{\pm N'^2 E'^q}{z^q}$, dove sia q numero dispari, e si prenda o il segno superiore, o l'inferiore (n.^{i} 49, 51.), ed insieme di un punto conjugato doppio collocato all' infinito dalla parte opposta; oppure di nessun ramo scorrente all' infinito, ma bensì di due punti doppj conjugati corrispondenti alle ascisse $z = \infty$, $z = -\infty$, (n.^{i} 50, 54.), oppure di quattro rami avvicinantisi due per parte ai rami dell' Iperbola $u'_1 = \frac{N'E'^{q'}}{z^{q'}}$ (n.^{i} 52, 55.), o finalmente di due rami da una parte, e di un punto doppio conjugato dall'altra, approssimantisi quelli ad uno dei rami dell' iperbola $u'_1 = \frac{N'E'^{q'}}{z^{q'}}$, e corrispondente questo al valore infinito, ed opposto della z (n.^{i} 53, 55.).

57. Supponghiamo, siccome nel (n.° 15.), che il coefficiente L abbia un numero n di valori, ciascuno de' quali sia

$= L'$, e che gli altri tutti siano da questo diversi. In conseguenza di ciò nel termine Mx^{β} successivo, e corrispondente ad $L'x$ posto $\beta = \frac{p}{k}$,

1.° Sappiamo pel (n.° 18.), che k può avere soltanto i valori 1, 2, 3, ec. n.

2.° Pel (n.° 28.) sappiamo, che di p possono essere valori solamente i numeri $k-1$, $k-2$, $k-3$, ec. 0, -1, -2, ec. fino inclusivamente a $-(m-k)$, se sia $n=k$, ed a $-(m-(k+1))$, se abbiasi $n>k$.

3.° Chiamato M' uno dei valori di M in $Mx^{\frac{p}{k}}$ corrispondente ad L', ed essendo 1, μ', μ'', μ''', ec. $\mu^{(k-1)}$ le radici della $\mu^k = 1$ (n.° 18.), saranno valori dell' indicato termine e corrispondenti ad $L'x$, tutti i seguenti

$M'x^{\frac{p}{k}}$, $\mu' M'x^{\frac{p}{k}}$, $\mu'' M'x^{\frac{p}{k}}$, $\mu''' M'x^{\frac{p}{k}}$, ec. $\mu^{(k-1)} M'x^{\frac{p}{k}}$; e supposto in generale $y - Lx = v$, $y - L^{(a)}x = v^{(a)}$, e particolarmente $y - L'x = v'$, $y - L''x = v''$ ec. (n.i 42, 47.) saranno essi tutti radici dell' Equazione $v'^k = M^k x^p$.

58. Denominiamo M', M'', M''', ec. $M^{(i)}$, e rispettivamente k_1, k_2, k_3, ec. $k_{(i)}$ tutti i valori, che possono M, e k ottenere contemporaneamente nel termine $Mx^{\frac{p}{k}}$ dipendentemente dal supposto $L'x$, ponendo, che tanto i valori M', M'', ec. $M^{(i)}$, come i k_1, k_2, ec. $k_{(i)}$, possano essere e uguali, e disuguali fra loro, ed i primi eziandio reali ed immaginarj. Pei (n.° 15., 3.° n.° prec.) è chiaro, che dovrà essere
$n = k_1 + k_2 + k_3 +$ ec. $+ k_{(i)}$, e ritenuto sempre $y - L'x = v$ (3.° n.° prec.) $x = \frac{z}{E'}$ (n.i 41, 47.), le Equazioni

$$\text{(XXXVII)}\quad v'^{k_1} = \frac{M'^{k_1}}{E'^{p'}} z^{p'},\ v'^{k_2} = \frac{M''^{k_2}}{E'^{p''}} z^{p''},\ v'^{k_2} = \frac{M'''^{k_3}}{E'^{p'''}} z^{p'''},\ \text{ec.}\ v'^{k_{(i)}} = \frac{M^{(i)k_{(i)}}}{E'^{p^{(i)}}} z^{p^{(i)}}$$

ci esprimeranno i rami parabolici, e gl' iperbolici (n.° 45.)

corrispondenti ad L', e dà esse potremo conoscere i punti conjugati, che pel (n.° 50.) consideriamo esistere in corrispondenza ai valori della z infiniti; mentre per altro i valori di p non siano zero, perchè ciò essendo, converrà come si è già veduto più volte (n.^{i} 41, 47, 48, ec.), e come si vedrà in seguito, per la determinazione delle accennate affezioni ricorrere al termine Nx^γ, ec.

59. Volendosi determinare quanti casi, e quante e quali delle precedenti Equazioni (XXXVII.) possono in ciascun caso aversi dipendentemente dal solo valore L' (n.° 57.); è chiaro, che altro non dovrem fare, che trovare tutti i numeri interi e positivi k_1, k_2, k_3, ec. $k_{(i)}$ (n.° prec.), nei quali può dividersi il dato numero n, trovare tutti i valori, che può rispettivamente ottenere p (2.° n.° 57.); e ciò fatto, dalle volte, che l'accennata divisione ci somministra
$k_1 + k_2 + k_3 + \text{ec.} + k_{(i)} = n$ potremo dedurre i casi richiesti, e combinando opportunamente ciascheduno dei valori di p' con ciascheduno dei valori degli altri p'', p''', ec., potremo riconoscere quante e quali siano in ognuno degli esposti casi le domandate Equazioni. In tutte queste determinazioni conviene poi, come si scorgerà in avvenire, che si eseguiscano certe considerazioni dipendenti principalmente dalle proprietà esposte nei (n.^{i} 14, 32, 36.), e da altre, che vedremo in seguito, onde evitare certi casi assurdi.

Sia a cagione di esempio $m = 6$, $n = 5$: potendo quivi risultare

1.° $k_1 = 5$, ed in corrispondenza $p' = 4,\ 3,\ 2, 1, 0, -1$;

2.° $k_1 = 4$, — — — — — $p' = 3,\ 2,\ 1,\ 0, -1$;

$k_2 = 1$, — — — — — $p'' = 0, -1, -2, -3, -4$;

3.° $k_1 = 3$, — — — — — $p' = 2,\ 1,\ 0, -1, -2$;

$k_2 = 2$, — — — — — $p'' = 1,\ 0, -1, -2, -3$;

4.° $k_1 = 3$, — — — — — $p' = 2,\ 1,\ 0, -1, -2$;

$k_2 = 1$, — — — — — p''

$k_3 = 1$, — — — — — p''' $\Big\} = 0, -1, -2, -3, -4$;

5.° $k_1 = 2$, — — — — — p'

$k_2 = 2$, — — — — — p'' $\Big\} = 1, 0, -1, -2, -3$;

$k_3 = 1$, — — — — — $p''' = 0, -1, -2, -3, -4$;

6.° $k_1 = 2$, — — — — — $p' = 1,\ 0, -1, -2, -3$;

$k_2 = 1$, — — — — — p''

$k_3 = 1$, — — — — — p'''

$k_4 = 1$, — — — — — p^{iv} $\Big\} = 0, -1, -2, -3, -4$;

7.° $k_1 = 1$, — — — — — p'

$k_2 = 1$, — — — — — p''

$k_3 = 1$, — — — — — p'''

$k_4 = 1$, — — — — — p^{iv}

$k_5 = 1$, — — — — — p^{v} $\Big\} = 0, -1, -2, -3, -4$;

col prescindere dai casi, nei quali i valori di p sono zero, e da quelle considerazioni, che abbiam detto procedere, principalmente dalle proprietà dei (n.^{i} 14, 32, 36.), e da altre da determinarsi in progresso, diremo, che nella prima ipotesi, ove si pone $k_1 = 5$, si hanno 5 casi, in ciascuno de' quali esiste una sola Equazione, e tali sono i seguenti

1.° $v'^5 = \frac{M'^5}{E'^4} z^4$, 2.° $v'^5 = \frac{M'^5}{E'^3} z^3$, 3.° $v'^5 = \frac{M'^5}{E'^2} z^2$, 4.° $v'^5 = \frac{M'^5}{E'} z$, 5.° $v'^5 = \frac{M'^5 E'}{z}$:

nella ipotesi 2.^{a} ove si ha $k_1 = 4$, $k_2 = 1$, risultano i casi seguenti in cisscheduno dei quali esistono due Equazioni; e tali sono

1.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^3} z^3$, $v' = \frac{M'' E'}{z'}$, 2.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^3} z^3$, $v' = \frac{M'' E'^2}{z^2}$

3.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^3} z^3$, $v' = \frac{M'' E'^3}{z^3}$, 4.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^3} z^3$, $v' = \frac{M'' E'^4}{z^4}$,

5.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^2} z^2$, $v' = \frac{M''E'}{z}$, 6.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^2} z^2$, $v' = \frac{M''E'^2}{z^2}$,

7.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^2} z^2, v' = \frac{M''E'^3}{z^3}$, 8.° $v'^4 = \frac{M'^4}{E'^2} z^2$, $v' = \frac{M''E'^4}{z^4}$

ec. ec.

e così in progresso.

60. Posto $M^k = H$ (n.° 19.), può accadere, che nella Equazione $H^i + e\, H^{i-1} +$ ec. $= 0$ (n.° 21.) esistano delle radici reali, e delle immaginarie, delle uguali, e delle disuguali fra loro. Cominciam dal supporre, che H' rappresenti una sua radice reale, che si abbia $\sqrt[k]{H'} = M'$, onde risulti $v'^k = M'^k x^p$, e però $v'^k = \frac{M'^k}{E'^p} z^p$, e che p, k siano numeri primi fra loro.

1.° Siano inoltre amendue i numeri p, k dispari In questa ipotesi la Curva dell' Equazione $v'^k = \frac{M'^k}{E'^p} z^p$ ha già due rami, che scorrono all' infinito, l' uno dalla parte delle ascisse, e delle ordinate positive, l' altro dalla parte delle coordinate negative. Ora tenendo conto dei valori di v' tanto positivi, quanto negativi, di essa Equazione sono radici non solo i valori $M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$, $-M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$, ma ancora tutti gli altri

$$\pm \mu' M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}, \pm \mu'' M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}, \pm \mu''' M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}, \text{ec.} \pm \mu^{(k-1)} M' \left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$$

(3.° n.° 57.), ne' quali μ', μ'', μ''', ec. $\mu^{(k-1)}$ sono tante quantità immaginarie. Dunque nella supposizione del valore della z infinito, scomparendo la potenza $z^{\frac{p}{k}}$ rapporto alla z per essere sempre $p < k$, potremo col ripetere quì quanto si è detto nel (n.° 50.) considerare, che la Curva data abbia non solo due rami scorrenti all' infinito e approssimantisi ai due sovraccennati, ma che di più abbia due punti conjugati dell' ordine $k - 1$*esimo* corrispondenti ai valori $\infty, -\infty$ della z.

Che se restando k dispari, sia p pari. Non provenendo da ciò altra variazione nella Curva della $v'^k = \frac{M'^k}{E'^p} z^p$, se non se che il ramo percorrente dalla parte delle ascisse negative, si porta verso le ordinate positive; la stessa variazione, e non altra succederà eziandio in corrispondenza nella Curva data.

2.° Abbiasi k numero pari, e per conseguenza p dispari. In questa ipotesi osservo; se il valore $H' = M'^k$ (n.° prec.) sia positivo o negativo; e suppostolo in primo luogo positivo, io dico, che la Curva delle $v'^k = \frac{M'^k}{E'^p} z^p$, e però la data dalla parte delle ascisse positive è fornita di due rami percorrenti all'infinito, e di un punto conjugato dell'ordine $k-2$ *esimo*; e dalla parte delle ascisse negative soltanto di un punto conjugato dell'ordine k *esimo*, essendo amendue questi punti a distanze infinite.

3.° Ritenendo k pari e p dispari, sia $H' = M'^k$ di valor negativo, onde cangeremo H' in $-H'$. Ogni qualvolta sia $z > 0$, i valori di v' nella $v'^k = -\frac{H'}{E'^p} z^p$ essendo immaginarj, la Curva non avrà in corrispondenza alcun ramo, ma un punto conjugato dell'ordine *kesimo*; mentre poi si ponga $-z$ in vece di z, giacchè la Equazione precedente diventa $v'^k = \frac{H'}{E'^p} z^p$, ed in questa due dei valori di v' sono reali, potrebbe credersi, che fossero reali anche i corrispondenti di y, come si è veduto accadere nel (n.° 51.), e però che la Curva data avesse in corrispondenza due rami infiniti.

Per ciò determinare prendo ad osservare i valori (XXVIII) (n.° 31.); che corrispondentemente a $\beta = \frac{p}{k}$ deve avere la y (n.° 18.); e siccome nel primo tra questi si ha il valore μ, che è $= 1$, e in un altro di essi esister deve un altro valore di μ, il quale, a cagione di k numero pari, dev' essere $= -1$, tale supporremo, che sia il secondo y'', onde posto $\mu' = -1$, si abbia $y'' = X - X' + X'' - X''' + \text{ec.} + X^{(k-2)} - X^{(k-1)}$. In conseguenza di ciò y', y'' saranno i due valori di y che corrispondo-

no alle due radici $+1$, -1 della Equazione $\mu^k - 1 = 0$; ma anche $+\sqrt[k]{\frac{-H'}{E'^p} z^p}$, $-\sqrt[k]{\frac{-H'}{E'^p} z^p}$ sono quelle tra le k radici della $v'^k = \frac{-H}{E'^p} z^p$, che corrispondono alle stesse radici $+1$, -1 della $\mu^k = 1$. Dunque i due precedenti valori y', y'' quelli saranno, che corrispondono ai due ora accennati della v', ossia rimesso x in vece di $\frac{z}{E'}$, ai due $+\sqrt[k]{-H' x^p}$, $-\sqrt[k]{-H' x^p}$. Ora questi due sono gli unici valori della v, i quali divengono reali, allorchè si fa z, e però x di valor negativo; dunque ancora y', y'' essendo gli unici tra i valori della y, che l'accennato cambiamento può render reali, cerchiamo di determinare, se realmente li renda tali. Facendo perciò un discorso pienamente simile a quello del (n.° 51.), ritengo da prima, che x sia di valor positivo, onde si abbiano $\sqrt[k]{-H'x^p}$, $-\sqrt[k]{-H'x^p}$, e quindi y', y'' di valore immaginario, faccio le stesse supposizioni del citato (n.° 51.), e avendosi quì ancora prossimamente.

$X + X' + X'' + X''' + \text{ec.} + X^{(k-2)} + X^{(k-1)} = Z + Z' \sqrt{-1}$,
$X - X' + X'' - X''' + \text{ec.} + X^{(k-2)} - X^{(k-1)} = Z - Z' \sqrt{-1}$,
e però
$X + X'' + \text{ec.} + X^{(k-2)} = Z$, $X' + X''' + \text{ec.} + X^{(k-1)} = Z \sqrt{-1}$,
la prima di queste ultime somme, e quindi i suoi coefficienti saranno reali, e la somma seconda sarà immaginaria, risultando, come nel citato (n.° 51.) ciascun de' suoi coefficienti moltiplicato per $\sqrt{-1}$, onde supporrò nella (XXVII) (n.° 31.)
$L' = a' \sqrt{-1}$, $M'_1 = b' \sqrt{-1}$, $N'_1 = c' \sqrt{-1}$, ec.
$L'_3 = a''' \sqrt{-1}$, $M'_3 = b''' \sqrt{-1}$, $N'_3 = c''' \sqrt{-1}$, ec. ec.

Pongasi $k = 2e$, ed $x = t^e$. Sostituendo nei valori delle X, X', X'', X''', ec. poichè risulta
$X = L' t^e + M' + N t^{-e} + P' t^{-2e} + Q' t^{-3e} + \text{ec.}$
$X' = (a' t^{e-1} + b' t^{-1} + c' t^{-e-1} + d' t^{-2e-1} + \text{ec.}) t^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}$

$$X'' = L'_2 t^{e-1} + M'_2 t^{-1} + N'_2 t^{-e-1} + P'_2 t^{-2e-1} + \text{ec.}$$

(XXXVIII) $$X''' = (a'''t^{e-2} + b'''t^{-2} + c'''t^{-t-2} + d'''t^{-2e-2} + \text{ec.})\, t^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,.$$

ec.

$$X^{(k-2)} = L'_{k-2} t + M'_{k-2} t^{-(e-1)} + N'_{k-2} t^{-(2e-1)} + P'_{k-2} t^{-(3e-1)} + \text{ec.}$$

$$X^{(k-1)} = (a^{(e-1)} + b^{(k-1)}t^{-e} + c^{(k-1)}t^{-2e} + d^{(k-1)}t^{-3e} + \text{ec.})\, t^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

otterremo in fine con la sostituzione le y', y'' uguali a due espressioni della t, che per brevità accennerò per

$T + T't^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, $T - T't^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, dove T, T' sono funzioni razionali della t. Ora potendo il numero e essere pari e dispari prendasi in primo luogo dispari, e si cangi la x in $-x$: dalla precedente Equazione $t^e = x$ divenuta perciò $t^e = -x$, ritraendosi $t = -\sqrt[e]{x}$, chiamo questo valore $-t_1$, lo sostituisco nelle Equazioni

$y' = T + T't^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, $y'' = T - T't^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, e chiamato T_1, T'_1 ciò che per tale sostituzione divengono T, T', poichè si ottiene $y' = T_1 - T'_1\sqrt{t_1}$, $y'' = T_1 + T'_1\sqrt{t_1}$, vedesi, che allorquando $-x$ è reale, risultando reale eziandio $-t$, divengono reali ancora i valori y', y''. Sia in secondo luogo e numero pari; diventando in questo caso $t_1 = \sqrt[e]{-x}$ quantità immaginaria, ancorchè $-x$ sia reale; divengono evidentemente immaginarie in corrispondenza anche le quantità

$T_1 + T'_1 t^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, $T_1 - T'_1 t_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, denominato anche in questo caso T_1, T'_1, ciocchè divengono T, T' per la sostituzione in vece di t del valore t_1, e immaginarj per conseguenza divengono ancora i valori y', y''.

Dunque concluderemo, che nella supposizione di k numero pari, ed $= 2e$, di p numero dispari e del valore di $H' = M'^k$ negativo, relativamente ai due rami della Curva $v'^k = -\frac{H'}{E'^p} z^p$ esistenti dalla parte delle z negative, la Curva data avrà essa pure due rami a quelli approssimantisi, ogni

qual volta sia e numero dispari, e non ne avrà di sorta alcuna, quando sia e numero pari. Nel primo poi di questi casi corrispondentemente a $z = -\infty$ esiste un punto conjugato dell' ordine $k-2$ *esimo*, ed uno dell'ordine *kesimo* ne esiste nel secondo.

4.° Sia nella $H^i + e\, H^{i-1} +$ ec. $= 0$ la radice H' immaginaria, e pongasi essa $= a + b\sqrt{-1}$; dovendo esistere un altro tra i valori di H immaginarj che dirò $H'' = a - b\sqrt{-1}$, risulteranno eziandio immaginarj i corrispondenti valori

$$M' = \sqrt[k]{H'} = \sqrt[k]{(a + b\sqrt{-1})},\ M'' = \sqrt[k]{H''} = \sqrt[k]{(a - b\sqrt{-1})},$$ e

quindi i valori tutti dei termini $M'x^{\frac{p}{k}}, M''x^{\frac{p}{k}}$, prendasi il valore di x positivo, o negativo. Perciò la Curva data non avrà in corrispondenza ramo alcuno infinito; e soltanto potremo, secondo il solito concetto (n.° 50., prec. 1.°, ec.) considerare, che in essa esista corrispondentemente a ciascuna delle ascisse $\infty, -\infty$ un punto conjugato dell' ordine 2*kesimo*.

5.° Potrebbe forse sembrare a qualcuno, che il discorso fatto nel (prec. 3.°) e l' altro simile del (n.° 51.) avessero luogo eziandio nel caso del (prec. 4.°), deducendosi quindi false le conseguenze ivi stabilite; ma con poca riflessione, che si faccia troveremo agevolmente non esser ciò vero. Ritenuto di fatti $M' = \sqrt[k]{(a + b\sqrt{-1})}$, ove sia b diverso dallo zero, (prec. 4.°) ritenuto k numero pari (prec. 3.°), e nella serie corrispondente, che pei (n.[i] 22, 31.) porrò essere la

$$y_1 = L'x + \mu^{k-1} M'x^{\frac{k-1}{k}} + \mu^{k-2} N'x^{\frac{k-2}{k}} + \text{ec.},$$

supposto pei noti principj di Algebra che ciascuno dei coefficienti si riduca alla forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, cosicchè si abbia $M' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $N' = \gamma + \delta\sqrt{-1}$, ec., ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec. siano tante quantità reali, osservo, che l' esposta serie si ridurrà alla $y_1 = L'x + \mu^{k-1}\alpha x^{\frac{k-1}{k}} + \mu^{k-2}\gamma x^{\frac{k-1}{k}} +$ ec. $+\left(\mu^{k-1}\beta x^{\frac{k-1}{k}} + \mu^{k-2}\delta x^{\frac{k-2}{k}} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1}$. Ora per essere k

numero pari, sotto la ipotesi di $\mu = 1$, e per l'altra di $\mu = -1$, si ottengono da essa serie due valori di y_1, tali essendo i due

$$L'x + ax^{\frac{k-1}{k}} + \gamma x^{\frac{k-2}{k}} + \text{ec.} + \left(\beta x^{\frac{k-1}{k}} + \delta x^{\frac{k-2}{k}} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1},$$

$$L'x - ax^{\frac{k-1}{k}} + \gamma x^{\frac{k-2}{k}} - \text{ec.} - \left(\beta x^{\frac{k-1}{k}} - \delta x^{\frac{k-2}{k}} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1};$$

e le supposizioni medesime nel (n.° 31.) somministrano li due risultati $X + X' + X'' + X''' + \text{ec.}$, $X - X' + X'' - X''' + \text{ec.}$ valori entrambi della y. Dunque fatto

$$X + X' + X'' + \text{ec.} = L'x + ax^{\frac{k-1}{k}} + \text{ec.} + \left(\beta x^{\frac{k-1}{k}} + \text{ec.}\right)\sqrt{-1},$$

dovrà risultare

$$X - X' + X'' - \text{ec.} = L'x - ax^{\frac{k-1}{k}} + \text{ec.} - \left(\beta x^{\frac{k-1}{k}} - \text{ec.}\right)\sqrt{-1}.$$

Ciò posto, si faccia, come nei (prec. 3.°, n.° 51.) $X + X' + X'' + \text{ec.} = Z + Z'\sqrt{-1}$; potremo noi quivi, come si è fatto nei citati (prec. 3.°, n.° 51.), dedurre $X - X' + X'' - \text{ec.} = Z - Z'\sqrt{-1}$? non mai; imperciocchè essendo k numero pari, la b diversa dallo zero, ed $M' = \sqrt[k]{(a + b\sqrt{-1})}$, sarà necessariamente la a diversa anch' essa dallo zero, e però la parte reale della $X - X' + X'' - \text{ec.}$, cioè la $L'x - ax^{\frac{k-1}{k}} + \text{ec.}$ sarà necessariamente diversa dalla parte reale della $X + X' + X'' + \text{ec.}$ cioè dalla $L'x + ax^{\frac{k-1}{k}} + \text{ec.}$ Dunque ec.

61. Esistano nella $H^i + e\,H^{i-1} + \text{ec.} = 0$ l radici uguali ad H', e rimangano p, k primi fra loro (n.° prec.) e p diverso dallo zero. In questo caso osserviamo in primo luogo non poter essere $k > \frac{n}{l}$, perchè se lo fosse, ne verrebbe $lk > n$; ma i valori di M corrispondenti al solo L' sono per lo meno di numero lk (n.° 18.): dunque i citati valori di M sarebbero più di n contro del (n.° 15.). Inoltre corrispondentemente al supposto $M' = \sqrt[k]{H'}$ esister deggiono l valori di N, e

questi nuovamente in tutto o in parte uguali o disuguali fra loro, reali od immaginarj. Dunque effettuando dei discorsi somiglianti agli eseguiti nei (n.^{i} 52, ec. 56.), troveremo quì ancora verificarsi a distanze infinite delle affezioni simili alle determinate nei n.^{i} citati.

1.° Diffatti avutasi la Curva dell' Equazione $v'^k = \frac{H'^k}{E'^p} z^p$, e supposto a norma di quanto si è detto nei (n.^{i} 19, 20, 21.) che il valore N' dipenda da un' Equazione $N^{k'} = G'$, ove G' sia radice di un' Equazione $G^i + e' G^{i-1} +$ ec. $= 0$, pongasi in primo luogo G' disuguale da tutti gli altri valori di G, e reale, vedremo, che corrispondentemente al valore del termine $N'x^{\frac{q}{k'}}$, nel quale q, k' siano primi fra loro, e k' numero dispari, al ramo $v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$ avvicinasi un ramo della Curva data, ed esiste un punto conjugato dell' ordine $k' - 1$ *esimo*.

2.° Che se k' è numero pari; allora conviene osservare se tale sia, o no, ancora k; e supposto primieramente essere k dispari, osservo se G' sia positivo o negativo: nel primo di questi casi la Curva data sarà fornita dalla parte delle q positive di due rami approssimantisi al ramo positivo della Curva $v'^k = H'\left(\frac{z}{E'}\right)^p$, e di un punto conjugato dell' ordine $k' - 2$*esimo*, avendone un altro dell' ordine k'*esimo* corrispondentemente a $z = -\infty$. Se sia poi $G' < 0$, supposto allora $k' = 2e'$ pel dimostrato nel (3.° n.° 60) i due rami della Curva proposta ed il punto $k' - 2$ *esimo* si troveranno dalla parte delle ascisse negative, ed il punto k' *esimo* dalla parte delle positive, allorchè sia e' numero dispari: che se e' è pari; allora la Curva non avrà in corrispondenza ramo alcuno infinito, e non vi sarà che un punto conjugato k'*esimo* per parte.

3.° Restando k' pari, sia pari eziandio k. Questa ipotesi farà sì, che quando H', G' siano amendue positivi, esisteranno

dalla parte delle z positive, e corrispondentemente al ramo

$v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$ due rami della Curva proposta, ed un punto conjugato dell' ordine $k'-2$ *esimo*, esistendone poi uno dell' ordine k' *esimo* dalla parte delle ascisse negative; succederanno in posizione contraria le stesse affezioni, allorchè H', G' siano amendue negativi, e sia in $k' = 2e'$ il numero e' dispari (3.° n.° 60.). Che se restando H', G' entrambi negativi, sia e' numero pari; oppure se qualunque siasi e', H', G' siano forniti di segno contrario, allora la Curva data non avrà in corrispondenza ramo alcuno infinito, e conterrà corrispondentemente a $z = \pm\infty$ due punti conjugati dell'ordine k' *esimo*.

4.° Se sia G' di valore immaginario, esistendo un altro valore immaginario di G a G' corrispondente; esisteranno rispettivamente eziandio due valori di N immaginarj, che supporrò essere N', N'', e per essi divenendo sempre immaginarj i due termini $N'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{q}{k'}}$, $N''\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{q}{k'}}$ prendansi le z positive, o negative; ne segue, che nella Curva non vi saranno in corrispondenza rami, ma soltanto due punti conjugati dell' ordine $2k'$*esimo*.

62. Dipendentemente da $\ddot{M}'$, e dal rispettivo esponente $\frac{p}{k}$ abbiansi $l' > 1$ valori di N uguali ad N', e diversi dagli altri, e tutti con un medesimo esponente $\frac{q}{k'}$. Ottenuto sotto questa ipotesi il corrispondente termine $N'x^{\frac{q}{k'}}$, passo alla ricerca del successivo coefficiente P' nel termine Px^{δ}, ove pongo $\delta = \frac{r}{k''}$, e giusta i (n.^{i} 19, 20, 2[illegible]) suppongo P' dipendere da un' Equazione $P^{k''} = F'$, essendo F' radice di un' altra $F^{i''} + e'' F^{i''-1} + \text{ec.} = 0$. Poichè può ancora F' essere

reale ed immaginario, uguale e disuguale dagli altri valori di F: se sia esso immaginario come nel (4.° n.° 61.) vedremo non esistere in corrispondenza ramo alcuno di Curva, ma soltanto dei punti conjugati determinabili come di sopra. Se poi sia F' reale, e diverso da tutti gli altri valori di F, risultandoci

$v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}} + N'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{q}{k'}} + P'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{r}{k''}}$, considero i segni delle quantità $H' = M'^k$, $G' = N'^{k'}$, $F' = P'^{k''}$, l'essere pari o dispari degl' indici k, k', k''; e con dei discorsi affatto simili ai precedenti (n.ⁱ 57, ec.) determinerò i corrispondenti rami della Curva data approssimantisi al ramo $v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$ all'infinito, ed i rispettivi punti conjugati; avvertendo, che mentre siano pari due o tre dei k, k', k'', la Curva data non avrà i citati rami, se non quando i rispettivi coefficienti H', G', F' abbiano il medesimo segno; e se, posto $F' < 0$, sia pari l'ultimo indice k'', non avrà la Curva rami infiniti corrispondenti, se non quando risulti $\frac{k''}{2}$ numero dispari (3.° n.° 60.).

Se mai sotto lo stesso esponente $\frac{r}{k''}$ esistessero più valori di P uguali a P'; cercherei i corrispondenti valori di Q, e dell'esponente ε nel successivo termine Qx^{ε}, e determinerei quindi come precedentemente i rami della Curva data, che scorrono all' infinito, e i punti conjugati. In egual modo proseguirei innanzi, se mai si trovassero dei valori di Q uguali anch'essi tra loro, e così in progresso. Ma quì pure, come nei (n.ⁱ 26,55.) deve rinnovarsi l'avvertenza, che si giungerà sempre necessariamente ad un coefficiente T, i cui valori sotto un esponente medesimo saranno tutti fra di lor disuguali.

63. A qualunque distanza poi succeda questa totale disuguaglianza dei coefficienti (n.° prec.), sempre accaderà, che

al ramo $v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$ si accosteranno, scorrendo all' infinito, e secondo la linea delle ascisse, i rispettivi rami della Curva data a due a due, e tra questi od uno dalla parte delle z positive, e l' altro dalla parte delle z negative, oppure amendue dalla stessa parte: e corrispondentemente ai valori immaginarj possiamo considerare aversi dei punti conjugati, l'ordine de' quali verrà determinato dal numero delle radici immaginarie. In conseguenza di ciò potremo in tutti i casi dopo di avere trovato il valore dei numeri k, h, l (n.i 18, 29.) ed il termine $M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$ riconoscere tostamente, come si osserva nel (n.° 55.) tutti gli accidenti, o affezioni, che in generale può avere la Curva data relativamente al ramo, che viene espresso dalla Equazione $v' = M'\left(\frac{z}{E'}\right)^{\frac{p}{k}}$, e che corrisponde ai valori della z estendentisi all' infinito.

64. Siano ora i numeri p, k non più primi fra loro (n.° 60.) ma composti, e pongasi come nel (n.° 23.) $p = gr$, $k = gh$, essendo r, h primi fra loro. In questa ipotesi se nella determinazione in Mx^{β} dell' esponente β il denominatore k sia risultato tale, non già per cagione estranea dipendente puramente dal calcolo, ma bensì, per la natura della corrispondente tra le serie (II), come deve sempre supporsi: allora quantunque il termine $M'x^{\frac{p}{k}} = M'x^{\frac{r}{h}}$ non abbia dipendentemente dal radicale *hesimo* che h valori, cioè gli h $M'x^{\frac{\gamma}{h}}$, $\rho' M'x^{\frac{r}{h}}$, $\rho'' M'x^{\frac{r}{h}}$, ec. $\rho^{(h-1)} M'x^{\frac{r}{h}}$ (n.° 23.); pure dovendo la serie corrispondente avere tra reali ed immaginarj $k = gh$ valori; ne segue, che dovremo considerare ciascuno degli ac-

cennati termini replicato g volte, e quindi venendo ripetuto g volte anche il termine primo $M'x^{\frac{p}{k}}$, e però il suo coefficiente M'; questo caso si ridurrà in fine a quello, nel quale si considera, che M abbia g valori tutti eguali ad M', e quindi a quello del (n.° 61.); dunque le affezioni rispettive della Curva data a distanze infinite si determineranno, come sonosi ritrovate le esposte nei (n.^{i} 61, 62, 63.).

65. In tutti i precedenti (n.^{i} 58, ec. 64.) si è supposto il numeratore p del valore $\frac{p}{k}=\beta$ diverso dallo zero; presentemente ponghiamolo allo zero uguale. Ritenendo le denominazioni dei numeri (41, 47.) sia in generale

$y-L'x-M=u, y-L^{(a)}x-M^{(b)}=u^{(a)}_{(b)}$, e particolarmente

$y-L'x-M'=u_1, y-L'x-M''=u'_2, y-L''x-M'=u''_1, y-L''x-M''=u''_2$

ec. e posto, che M', M'', M''', ec. siano gli h (n.° 29.) valori di M che corrispondono al valore $\beta=0$, supponghiamo, che M' sia ripetuto le volte l', M'' le volte l'', M''' le volte l''', ec. Cercando nelle supposizioni presenti il valore di N, e quello di $\gamma=\frac{q}{k'}$ nel termine $Nx^{\gamma}=Nx^{\frac{q}{k'}}$, vedremo tosto, che essendo q, k' numeri primi tra loro

1.° Il denominatore k' non può dipendentemente da M' che ottenere i valori 1, 2, 3, ec. l', dipendentemente da M'', gli 1, 2, 3, ec. l'', dipendentemente da M''' gli 1, 2, 3, ec. l''' ec. (n.^{i} 29. 30.).

2.° I valori del numeratore q sono $-1, -2, -3$, ec. fino a $-(m-h)$ quando si ha $h=n$, e sino a $-(m-(h+1))$ quando è $h<n$ (n.° 30.). Essendo quindi tali valori tutti negativi cangerò q in $-q$, e lo riterrò costantemente così.

3.° Chiamate 1, v', v'', ec. $v^{(k'-1)}$ le radici della Equazione $v^{k'}=1$, i termini $\frac{N}{x^{\frac{q}{k'}}}$, $\frac{v'N}{x^{\frac{q}{k'}}}$, $\frac{v''N}{x^{\frac{q}{k'}}}$, ec. $\frac{v^{(k'-1)}N}{x^{\frac{q}{k'}}}$ saranno

tutti radici della Equazione $u'^{k'} = \frac{N^{k'}}{x^q}$.

4.° Cercando dipendentemente da L', e dai varii termini M', M'', M''', ec. tutti i valori del successivo termine $Nx^{\frac{q}{k'}}$, e ponendo in questo $\frac{z}{E'}$ in vece di x (n.° 41.), supponghiamo, che ci siano risultate le Equazioni seguenti, delle quali quelle della prima linea corrispondano ad M', quelle della linea seconda ad M'', quelle della terza ad M''', ec.

$$u'_1{}^{k'(a')} = N^{(a')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(a')}}, \; u'_1{}^{k'(a'')} = N^{(a'')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(a'')}}, \; u'_1{}^{k'(a''')} = N^{(a''')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(a''')}}, \text{ ec.}$$

$$\text{X)}\; u'_2{}^{k'(b')} = N^{(b')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(b')}}, \; u'_2{}^{k'(b'')} = N^{(b'')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(b'')}}, \; u'_2{}^{k'(b''')} = N^{(b''')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(b''')}}, \text{ ec.}$$

$$u'_3{}^{k'(c')} = N^{(c')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(c')}}, \; u'_3{}^{k'(c'')} = N^{(c'')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(c'')}}, \; u'_3{}^{k'(c''')} = N^{(c''')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(c''')}}, \text{ ec.}$$

ec.

Vedesi come nel (n.° 58.), che dovrà essere $k'_{(a')} + k'_{(a'')} + k'_{(a''')} + \text{ec.} = l'$, $k'_{(b')} + k'_{(b'')} + k'_{(b''')} + \text{ec.} = l''$, $k'_{(c')} + k''_{(c'')} + k'''_{(c'')} + \text{ec.} = l'''$, ec.; potendo quì ancora i numeri espressi per le k' essere uguali e disuguali fra loro; e in conseguenza di queste Equazioni potremo, come nel (n.° 59.) determinare quanti casi, e quali Equazioni (XXXIX) in ciascun caso possono dipendentemente dal solo valore L', e dai valori corrispondenti M', M'', M''' ec. risultare.

66. Poichè anche i valori per esempio $N^{(a')}$, $N^{(a'')}$, $N^{(a''')}$, ec. dipendenti dal solo M' (n.° prec.) possono in tutto, o in parte essere reali ed immaginarj, uguali e disuguali fra loro; ancora rapporto ai rami della Curva per esempio

$u'_1{}^{k'(a')} = N^{(a')}\left(\frac{E'}{z}\right)^{q^{(a')}}$, ed ai rami e punti conjugati corrispondenti della Curva data potremo eseguire quelle considerazioni, che si sono eseguite, e dedurre quelle conseguenze,

che si sono dedotte nei (n.^{i} 60, ec. 64.) relativamente ai rami della Curva $v'^k = M' \left(\frac{z}{E}\right)^p$, ed ai rami corrispondenti, e punti conjugati della Curva proposta.

67. Fra le Curve delle Equazioni $v'^k = M^k \left(\frac{z}{E'}\right)^p$, $u'^{k'} = N^{k'} \left(\frac{E'}{z}\right)^q$, e quindi tra i rami corrispondenti della Curva data esistono alcune differenze essenziali, le quali è necessario il riconoscere, e tali sono le seguenti.

1.° L' Equazione $u^{k'} = N^{k'} \left(\frac{E'}{z}\right)^q$ rappresenta sempre un' iperbola (2.° n.° 65.), e però i rami della data Curva, che vi si accostano, sono sempre iperbolici (n.° 45.). L Equazione poi $v^k = M^k \left(\frac{z}{E}\right)^p$ esprimendo una parabola quando sia $p > 0$, ed un' iperbola quando abbiasi $p < 0$; i rispettivi rami delle Curve saranno in corrispondenza nel primo caso parabolici, e nel secondo iperbolici.

2.° Dai (prec. 1.° 2.° n.° 57; 2.° n.° 65.) apparisce, come eccettuate le Curve di 2.° grado, nelle altre tutte il numero dei rami iperbolici superi di gran lunga il numero dei parabolici.

3.° Non ottenendosi parabole, che dalla Equazione $v^k = M^k \left(\frac{z}{E}\right)^p$, (prec. 1.°), ed essendo $v = y - Lx$ (n.° 42.); i diametri delle parabole, alle quali si accostano i rami parabolici della nostra Curva saranno tutti determinabili da Equazioni della forma $y - Lx = 0$ (n.° 44.). Quindi se esistono nella Curva data rami parabolici, le parabole corrispondenti non potranno giammai avere i loro diametri paralleli; ma o saranno essi tra loro obbliqui, o coincideranno in una retta sola. Espresse di fatti due di queste parabole dalle Equazioni $v'^k{}_1 = M^k{}_1 \left(\frac{z}{E'}\right)^{p'}$, $v''^k{}_2 = M''^k{}_2 \left(\frac{z}{E''}\right)^{p''}$, poichè $y - L'x = 0$, $y - L''x = 0$ sono le due rette, che servon loro di diametri;

tali diametri saranno obbliqui fra loro, mentre L′, L″ siano tra lor disuguali; e se si abbia L′ = L″, essi diametri coincideranno in una sola retta.

4.° Lo stesso si dice rapporto agli assintoti rettilinei di quelle iperbole, le quali provengono dalla sola $v^k = M^k \left(\frac{z}{E}\right)^p$ paragonate fra loro. Ma le iperboli provenendo ancora dalle $u^{k'} = N^{k'} \left(\frac{E}{z}\right)^q$ (prec. 1.°), questo fa sì, che la Curva data potrà benissimo avere dei rami iperbolici, i quali si approssimino ad assintoti fra di lor paralleli. Supposto in realtà, che la Curva proposta sia fornita di rami, i quali si avvicinino ai rami delle tre iperbole

$$v'^{k_1} = M'^{k}{}_1 \left(\frac{z}{E'}\right)^{p'}, \; u_1{}''^{k'}{}_1 = N''^{k'}{}_1 \left(\frac{E''}{z}\right)^{q''}, \; u_2{}''^{k'}{}_2 = N'''^{k'}{}_2 \left(\frac{E'''}{z}\right)^{q'''},$$

poichè le rette $y - L'x = 0$, $y - L''x - M' = 0$, $y - L'''x - M'' = 0$ (n.i 65, 44) esprimono i loro assintoti rispettivi; vedesi che essi risultano bensì tra loro obbliqui, ogni qual volta siano tra loro diversi L′, L″, L‴, e coincidono in un' assintoto solo, quando si abbia L′ = L″ = L‴, ed insieme M′ = M″ = 0; ma se restando L′ = L″ = L‴, i coefficienti poi M′, M″ siano diversi fra di loro, e diversi dallo zero; allora gl' indicati assintoti saranno evidentemente paralleli fra loro, senza che coincidano punto; coincideranno in fine gli ultimi due fra loro, rimanendo paralleli al primo, mentre si voglia, che M′ differente dallo zero divenga uguale ad M″.

68. Nella classificazione delle Curve essendo necessario il conoscere quando i diametri delle parabole, e gli assintoti delle iperbole sono tra loro paralleli, oppure obbliqui, o coincidenti in una sola retta; riterremo per esprimere le ordinate le lettere v, u, apponendo ad esse gli apici, ed i numeri secondo le regole esposte nei (3.° n.° 57, n.° 65): perchè con questo mezzo conoscendosi a colpo d' occhio quali sono le rette, le quali servono da diametri e da assintoti (n.° 43.), conosceremo tostamente ancora per lo stesso (n.° 43.),

se sono essi obbliqui, paralleli, o coincidenti fra loro. In vece delle $v^k = M^k \left(\frac{z}{E}\right)^p$, $u^{k'} = N^{k'} \left(\frac{E}{z}\right)^q$ ci serviremo in avvenire per semplicità maggiore delle Equazioni
$v^k = M^k x^p$, $u^{k'} = N^{k'} x^{-q}$.

CAPO II.°

Della determinazione dei Rami, che nelle Curve algebraiche scorrono all' infinito.

69. Ritenuto, che nella Equazione (VII) dedotta giusta i (n.^{i} 2, 3, 4.) dalla (III) la quantità L' sia radice n volte (n.° 15.), e supposto che la Curva della citata Equazione (III) sia fornita di rami, i quali corrispondentemente allo stesso assintoto o diametro $y = L'x$ si avvicinino ai rami di tante iperbole, o parabole (n.° 45.): si domanda di determinare le Equazioni di tali iperbole, o parabole, che per questo chiamerò *assintotiche*.

Trasformata perciò col porre $y = L'x + y_1$ (n.° 2.), la (III) nella (XXIII) (n.° 27.), faccio tanto nella serie $y_1 = Mx^{\beta} + Nx^{\gamma}$ + ec. (n.° 2.) quanto nella (XXIII) $x = \infty$; ridotta così la prima di queste Equazioni alla $y_1 = Mx^{\beta}$, osservo, che nella seconda non potranno sussistere, che i primi termini attualmente esistenti nelle sue linee prima, seconda, terza, ec., ed essa perciò, ritenute le denominazioni del (n.° 27.) ed osservando pel citato (n.° 27.) dover essere $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, ec. $A^{(n-1)} = 0$, $A^{(n)}$ non $= 0$, supporremo, che si riduca alla

$$Gx^{m-r} + G'x^{m-r'}y_1 + G''x^{m-r''}y^2_1 + \text{ec.} + G^{(e)}x^{m-r^{(e)}}y_1^{e} + \text{ec.} + G^{(e')}x^{m-r^{(e')}}y_1^{e'} + \text{ec.} + A^{(n)}x^{m-n}y_1^{n} + \text{ec.} + G'^{(e'')}x^{m-r^{(e'')}}y_1^{e''} + \text{ec.} + a^{(m)}y_1^{m} = 0 \qquad \text{(XL)}$$

dove formandosi dagli esponenti della y_1 una serie crescente, si abbia, $e < e' < n < e'' <$ ec., e sarà $r > 0$, $r' > 1$, $r'' > 2$, ec. $r^{(e)} > e$, $r^{(e')} > e'$, ec. $r^{(e'')}$ non $< e''$, ec. l' ipotesi di $x = \infty$ fa sì, che ancora altri termini della E-

quazione (XL) in generale svaniscono, non rimanendovi che quei termini, nei quali dopo aver posto Mx^{β} in vece di y_1, gli esponenti divengono fra loro uguali, e maggiori di tutti gli altri (n.° 2.). Inoltre l'esponente β è tuttora indeterminato, e la varia conveniente sua determinazione potrà far sì, che ora alcuni, ed ora altri dei termini della (XL) godano dell' esposta proprietà di acquistare gli esponenti della x uguali fra loro, e maggiori degli altri. Finalmente trovati questi opportuni valori di β, e con la sostituzione di ciascuno di essi nel termine Mx^{β}, e la sostituzione di questo termine in vece di y_1 riducesi la (XL) a quella Equazione finale, la qual contiene i soli termini che hanno sulla x esponenti fra loro eguali e maggiori degli altri; ed essa divisa per tali potenze tra loro eguali della x, somministra un' Equazione in M, dalla quale ottengonsi i valori di questo coefficiente, che corrispondono al supposto di β, come nel (n.° 2.) si ottennero in circostanze simili i valori di L corrispondenti a quelli di α. Dunque ogni qual volta avremo scoperti tutti i sovraesposti valori di β, avremo quindi i rispettivi di M, ed avremo in fine per essi tutti determinate tante Equazioni $y_1 = Mx^{\beta}$, ciascuna delle quali nella ipotesi di $x = \infty$ farà verificare la (XXIII), ed anzi tutte avremo così ricavate le Equazioni di simil natura. Ma da tali Equazioni, avendosi $y_1 = y - L'x$ (n.^{i} 2, 3.) $= v'$ (n.° 47.), dalla $v' = Mx^{\beta}$ tutte vengono rappresentate quelle iperbole, e parabole aventi rispettivamente lo stesso assintoto, o diametro $y = L'x$, alle quali a distanze infinite e in corrispondenza all' accennato assintoto o diametro $y = L'x$ avvicinansi rami della Curva rappresentata dalla supposta Equazione (III) (n.^{i} 44, 45.). Dunque dipendentemente dalla determinazione degli indicati valori di β otterremo la soluzione del problema proposto.

Per determinare attualmente questi valori di β, i quali finora non sono stati, che semplicemente supposti, si collo-

chi nella (XL) Mx^{β} in vece di y_1, considerando β indeterminato, si raccolgano quindi tutti gli esponenti, che ne vengono, della x nella seguente serie

$$m-r,\ m-r'+\beta,\ m-r''+2\beta,\ \text{ec.}\ m-r^{(e)}+e\beta,\ \text{ec.}\ m-r^{(e')}+e'\beta.\ \text{ec.}\ m-n+n\beta,\ \text{ec.}\ m-r^{(e'')}+e''\beta,\ \text{ec.}\ m\beta, \quad \text{(XLI)}$$

si cerchino in questa tutti i diversi valori di β, che rendono due o più de' termini della serie uguali fra loro, e maggiori degli altri, e questi saranno i richiesti. Il metodo della sotto posta nota (*) propostoci da Lagrange già noto, servirà alla determinazione di tali valori di β.

(*) Il metodo di Lagrange onde ottenere tutti i valori, che può nella serie (XXIV) avere β, capaci di rendere due o più termini della serie medesima uguali fra loro, e maggiori di tutti gli altri, sappiamo che consiste nell'uguagliare in primo luogo successivamente il primo termine $m-r$ con ciascuno dei seguenti $m-r'+\beta$, $m-r''+2\beta$, ec., nel determinare i varj valori, che può quindi acquistare β, e ritenere il più piccolo tra questi. Partendo poscia dall' ultimo dei termini della serie (XXIV), che ha somministrato l' indicato valore più piccolo, si uguaglia questo a ciascuno dei termini, che seguono; e tra i valori, che in questo secondo caso acquista β, tienesi conto parimenti del più piccolo. Cominciando in terzo luoggo dall'ultimo dei termini, che hanno per β somministrato l'esposto secondo valore più piccolo, uguagliasi esso termine con ciascheduno dei successivi, tra i valori, che riceve β in questo terzo caso, si conserva in simile guisa il più piccolo; e così si prosegue, finchè siasi giunto all' ultimo termine della serie supposta. Ciò fatto tutti gli accennati valori più piccoli di β quelli tutti saranno, che rendono due o più termini della serie data uguali fra loro, e maggiori di tutti gli altri. Per questa soluzione poi è essenziale, che i termini della serie siano, siccome nella (XXIV), scritti in modo, che i coefficienti di β formino una serie crescente: se mai questi formassero una serie decrescente, allora i valori della β trovati come di sopra, che sciolgono il Problema, non sarebbero già più i minori, ma i più grandi.

Sia data per esempio la serie particolare

$5, 7+\beta, 9+2\beta, -5+4\beta, 7\beta, 10+8\beta, 10\beta$,

poichè dal paragone del primo 5 con i termini ulteriori trovo per β i valori $-2, -2, \frac{10}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{10}$, e siccome tra questi il primo -2 nato dal confronto fra i primi tre

70. 1.° Poichè i coefficienti di β nei termini (XLI) formano per la ipotesi una serie crescente; i valori di esso esponente β, che l'esposto metodo ci somministra, saranno essi pure successivamente crescenti, in modo che il primo sarà il minimo, il secondo l' immediatamente maggiore del minimo, e cosi in progresso. Per conseguenza se esistono iperbole insieme e parabole assintotiche alla nostra Curva, e corrispondenti allo stesso assintoto rettilineo o diametro $y=L'x$, verranno prima determinati i valori di β, che spettano alle iperbole, e quelli in seguito, che riguardano le parabole; e sì nelle une, che nelle altre di queste Curve si comincieranno a trovare quelle, che sono di esponente minimo, e si procederà poi innanzi, ascendendo gradatamente.

2.° Dopo i valori di β, che appartengono alle iperbole, e prima degli appartenenti alle parabole potranno esistere dei valori di β uguali allo zero. In corrispondenza poi a questi valori di $\beta=0$ potranno esistere altre iperbole assintotiche alla Curva data; ma esse si avvicineranno ad assintoti rettilinei espressi da Equazioni della forma $y=L'x+M$ (n.^{i} 42, ec. 45.).

71. Tra i valori di β, che si determinano nel (n.° 69.),

---

termini, è il più piccolo, dirò che questo -2 è uno dei valori richiesti di β. Partendo ora giusta la regola stabilita dal terzo termine $9+2\beta$, paragono esso con i successivi, e ottenendosi $\beta=7$, $\frac{9}{5}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{9}{8}$, dirò, che $-\frac{1}{6}$ nato dal paragone del terzo col termine penultimo è un secondo valore di β. Finalmente dall'uguaglianza del penultimo col termine ultimo avendosi l'unico valore 5; sarà questo 5 un terzo valore di β: onde nel posto esempio tre sono i valori di β che sciolgono il Problema, cioè i tre -2, $-\frac{1}{6}$, 5.

Siccome poi nelle considerazioni nostre dev' essere $\beta<\alpha$ (n.° 1.) e però $\beta<1$ (n.° 3.); quindi è, che non dovremo già tener conto di tutti i valori, che il metodo di Lagrange somministra, ma di quelli soltanto, che sono eziandio <1. Perciò nell'esempio prec. sarebbero giusta le nostre considerazioni valori di β solamente i due -2, $-\frac{1}{6}$, e non già il terzo 5.

uno ne esiste necessariamente, il qual nasce, giusta il metodo della nota ivi apposta, dall' uguagliare il termine $m-n+n\beta$ nella serie (XLI) con uno o più dei termini, che lo precedono; ed anzi questo valore sarà il massimo, che nelle poste circostanze (n.° 69.) può ottenere esso β.

Preso nella serie (XLI) uno qualsivoglia dei termini che precedono $m-n+n\beta$, in generale il termine $m-r^{(e)}+e\beta$, paragono questo a norma dell' indicato metodo con tutti i successivi, tra quali scelgo in generale i tre $m-r^{(e')}+e'\beta$, $m-n+n\beta$, $m-r^{(e'')}+e''\beta$. Avendosi pel citato (n.° 69) $e<e'<n<e''$, ed $r^{(e)}>e$, $r^{(e')}>e'$, $r^{(e'')}$ non $<e''$; suppongo $e=n-b$, $e'=n-b'$, $e''=n+b''$, $r^{(e)}=e+a=n-b+a$, $r^{(e')}=e'+a'=n-b'+a'$, $r^{(e'')}=e''+a''=n+b''+a''$, ove sia $b>b'>0$, $b''>0$, $a>0$, $a'>0$, ed a'' non <0; e siccome l' accennato paragone ci dà per β i tre valori. $\frac{r^{(e')}-r^{(e)}}{e'-e}$, $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$, $\frac{r^{(e'')}-r^{(e)}}{e''-e}$, ne verrà il primo $\frac{r^{(e')}-r^{(e)}}{e'-e}=\frac{n-b'+a'-(n-b+a)}{n-b'-(n-b)}=\frac{b-b'-(a-a')}{b-b'}=1-\frac{a-a'}{b-b'}$, il secondo $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}=1-\frac{a}{b}$, ed il terzo $\frac{r^{(e'')}-r^{(e)}}{e''-e}=1-\frac{a-a''}{b+b''}$. Ora abbiamo $\frac{a}{b}>\frac{a-a''}{b+b''}$, perchè essendo $\frac{a}{b}=\frac{a(b+b'')}{b(b+b'')}$, $\frac{a-a''}{b+b''}=\frac{(a-a'')b}{b(b+b'')}$, risulta $\frac{a}{b}-\frac{a-a''}{b-b''}=\frac{ab''+a''b}{b(b+b'')}>0$. Dunque avendosi $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}<\frac{r^{(e'')}-r^{(e)}}{e''-e}$, e rappresentandosi da $m-r^{(e'')}+e''\beta$ uno qualsivoglia dei termini, che nella serie (XLI) succedono ad $m-n+n\beta$; ne segue, che tra i valori di β, i quali risultano dal paragonare $m-r^{(e)}+e\beta$ con tutti i termini $m-n+n\beta$, ec. $m\beta$, il primo $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$ è il più piccolo di tutti. Suppongasi inoltre, che $m-r^{(e)}+e\beta$ sia tra i termini $m-r$, $m-r'+\beta$, $m-r''+2\beta$, ec. $m-r^{(n-1)}+(n-1)\beta$, che precedono $m-n+n\beta$, quell' ultimo, da cui conviene, secondo il metodo della nota al (n.° 69), dipartire, onde proseguendo innanzi il solito paragone con i termi-

ni successivi si vengano a determinare gli ulteriori valori di β, che si ricercano. In questa ipotesi io dico dover essere $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$ non $>$ $\frac{r^{(e')}-r^{(e)}}{e'-e}$ perchè se ciò non fosse; allora non più $m-r^{(e)}+e\beta$, ma bensì $m-r^{(e')}+e'\beta$, oppure un altro termine posto tra $m-r^{(e')}+e'\beta$, ed $m-n+n\beta$ sarebbe per la natura dell' indicato metodo quell' ultimo, che abbiamo poc' anzi supposto, il che è contro della supposizione medesima. Ma tale ipotesi, per poca riflession che si faccia, agevolmente si vede, che deve sempre aver luogo. Pertanto, esistendo sempre un termine $m-r^{(e)}+e\beta$ precedente $m-n+n\beta$, dal cui paragone con tutti i successivi della serie (XLI) ottengonsi per β tanti valori, de' quali $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$ è il più piccolo, ne segue, che questo $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$, per quanto si è detto nell' esposta nota sarà sempre uno dei valori richiesti di β; ma esso risulta dall'uguaglianza $m-r^{(e)}+e\beta=m-n+n\beta$. Dunque, ec.

Aggiungo, che fra tutti i valori di β, che si considerano questo $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$ è il massimo. Difatti tutti quelli, che possono, essere risultati dal paragone fra loro dei termini $m-r$, $m-r'+\beta$, $m-r''+2\beta$, ec. $m-r^{(e)}+e\beta$ pel (1.° n.° 70.) sono tutti $<$ $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$; dal paragone di $m-r^{(e)}+e\beta$ con i termini ulteriori della serie, ottienesi il solo valore $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$, e l' ultimo termine, con cui per la determinazione di questo uguagliasi $m-r^{(e)}+e\beta$, è $m-n+n\beta$. Dunque se mai esistesse qualch' altro valore di β, esso dovrebbe risultare dal paragonare $m-n+n\beta$ con i termini della (XLI), che ad esso succedono: ma l' Equazione $m-n+n\beta=m-r^{(e'')}+e''\beta$ somministra $\beta=\frac{r^{(e'')}-n}{e''-n}=1+\frac{a''}{b''}$. Dunque esprimendosi da $m-r^{(e'')}+e''\beta$ uno qualunque dei termini successivi ad $m-n+n\beta$; ne segue, che se mai esistesse qualche ulterior valore di β, esso esprimendosi in generale da $\frac{r^{(e'')}-n}{e''-n}$, sarebbe

non <1: ma qualunque valore di β dev'essere <1 (n.[i] 1, 3.); dunque niuno potendocene risultare dal paragone del termine $m-n+n\beta$ con gli ulteriori; ne viene che $\frac{n-r^{(e)}}{n-e}$ sarà l'ultimo, e quindi il massimo (1.° n.° 70.), che β può ottenere. Dunque ec.

72. Una Curva algebraica qualunque di grado m non può aver mai tanti rami parabolici, od iperbolici, i quali abbiano per diametri, o rispettivamente per assintoti m rette tutte separate fra loro, e fra lor parallele.

Supponghiamo per ora, che realmente esistano nella Curva dell' Equazione $f(x,y)=0$ (n.° 1.) gl' indicati rami; i diametri, o gli assintoti corrispondenti verranno determinati pei (n.[i] 43, 44.) dalle m Equazioni $y=L'x+M'$, $y=L'x+M''$, $y=L'x+M'''$ ec., dove i coefficienti M', M'', M''', ec. dovranno essere tutti disuguali fra loro, ed uno solo per conseguenza fra essi potrebbe essere zero.

Ora essendo tali rette di numero m, di numero m esser deggiono ancora le Equazioni delle parabole, od iperbole corrispondenti; ma m è il grado della Equazion data $f(x,y)=0$; dunque in ciascuna delle accennate Equazioni non potendo la variabile u, oppure v ascendere che al primo grado, e l'esponente della $\frac{z}{E}$, ossia della x non potendo che essere numero intero (n.° 58, 4.° n.° 65.), esse Equazioni saranno le seguenti $u'_1=\frac{N'}{x^{q'}}$, $u'_2=\frac{N''}{x^{q''}}$, $u'_3=\frac{N'''}{x^{q'''}}$, ec. $u'_{(m)}=\frac{N^{(m)}}{x^{q^{(m)}}}$; e quindi i rami supposti saranno tutti iperbolici, e di primo grado (n.[i] 44, 45.). Siccome poi uno dei valori di M può essere zero, se tale sia il primo M', l' iperbola corrispondente verrà espressa dalla $v'=\frac{N'}{z^{p'}}$.

1.° Ciò posto suppongasi in primo luogo, che niuno dei valori di M sia $=0$. In questa ipotesi avremo nel termine Mx^{6} l' esponente β, che dovrà essere m volte $=0$, e però avendosi il numero h (n.° 29.) $=m$, col porre $y=L'x+y_1$, la Equazione (III) nel convertirsi nella (XXV), si convertirà nel-

la $u + Vy_1 + Ty^2_1 +$ ec. $+ a^{(m)} y^m_1 = 0$, ma questa è un' Equazione priva affatto della x, la quale per conseguenza ci somministra esattamente $y'_1 = M'$, $y''_1 = M''$, $y'''_1 = M'''$, ec. $y_1^{(m)} = M^{(m)}$.
Dunque risultando ancora esattamente
$y' = L'x + M'$, $y'' = L'x + M''$, $y''' = L'x + M'''$, ec. $y^{(m)} = L'x + M^{(m)}$, il primo membro dell' Equazione $f(x, y) = 0$ non sarà contro del (n.° 1.), che il prodotto $(y - L'x - M')(y - L'x - M'')(y - L'x - M''') \ldots (y - L'x - M^{(m)})$ di m funzioni razionali delle x, y; ed essa Equazione anzichè una Curva ci esprimerà contro della ipotesi un sistema di m rette parallele fra loro.

2.° Abbiasi in secondo luogo uno dei valori di $M = 0$. In questo caso diventando nel termine Mx^{β} l' esponente β uguale allo zero le volte $m - 1$, avremo h (n.° 29.) $= m - 1$; e rimanendo L' ripetuto m volte avremo n (n.° 15.) $= m$, onde risulta $n > h$; ma, per quanto si è detto (3.° n.° 29.), allorchè si ha $n > h$, il minimo numero che nei primi termini a sinistra della (XXV) deve sottrarsi da m negli esponenti della x, dev' essere $h + 1$. Dunque nel caso nostro essendo $h + 1 = m$, la (XXV) diverrà nuovamente
$u + Vy_1 + Ty^2_1 +$ ec. $+ a^{(m)} y^m_1 = 0$, e per conseguenza ancora in questa seconda ipotesi si verificherà il nostro Teorema.

73. Supposto, che la Curva dell' Equazione (III) (n.° 1.) sia dotata di $2f$ rami iperbolici approssimantisi a due a due ai rami delle f iperboli

$v' = M'x^{-\frac{p}{k}}$, $v' = M''x^{-\frac{p}{k}}$, $v' = M'''x^{-\frac{p}{k}}$, ec. $v' = M^{(f)}x^{-\frac{p}{k}}$, le quali si riferiscano ad un medesimo assintoto rettilineo $y = L'x$ (n.° 47.), abbiano uno stesso esponente $-\frac{p}{k}$, e questo sia il minimo dei valori di β (n.° 69 1.° n.° 70.). Si domanda di determinare i valori, che può ottenere il numero f, ed i corrispondenti delle quantità M', M'', M''', ec. $M^{(f)}$, volendosi dato il numero n (n.° 15.), e capaci di cambiarsi

a piacimento i coefficienti dell' Equazione data, purchè si conservi quanto si è stabilito nei (n.[i] 1., 37.).

Ottenute siccome nel (n.° 69.) per la determinazione di β nella $y_1 = Mx^\beta$, l' Equazione (XL), e la serie degli esponenti (XLI), supponghiamo, che tra questi ultimi, quelli che uguali fra loro ci somministrano, giusta il metodo della nota al (n.° 69.), il valore di $\beta = -\frac{p}{k}$, siano i seguenti

$$m - r^{(e)} + e\beta,\ m - r^{(e')} + e'\beta,\ m - r^{(e'')} + e''\beta, \text{ ec. } m - r^{(e^{f-1})} + e^{(f-1)}\beta,\ m - r^{(e^f)} + e^{(f)}\beta, \quad \text{(XLII)}$$

nei quali sia $e < e' < e'' < \text{ec.} < e^{(f-1)} < e^{(f)}$, e quindi si abbia

$$\beta = \frac{r^{(e')} - r^{(e)}}{e' - e} = \frac{r^{(e'')} - r^{(e')}}{e'' - e'} = \frac{r^{(e''')} - r^{(e'')}}{e''' - e''} = \text{ec.} = \frac{r^{(e^f)} - r^{(e^{f-1})}}{e^{(f)} - e^{(f-1)}}.$$

L' Equazione (XL) (n.° 69.) cangiandosi perciò nella

$$\begin{aligned} G^{(e)} x^{m - r^{(e)}} y_1^{e} + G^{(e')} x^{m - r^{(e')}} y_1^{e'} + G^{(e'')} x^{m - r^{(e'')}} y_1^{e''} + \text{ec.} \\ + G^{(e^{f-1})} x^{m - r^{(e^{f-1})}} y_1^{(e^{f-1})} + G^{(e^f)} x^{m - r^{(e^f)}} y_1^{e^{(f)}} = 0, \end{aligned} \quad \text{(XLIII)}$$

posto Mx^β invece di y_1, otterremo per M l' Equazione

$$G^{(e)} M^{e} + G^{(e')} M^{e'} + G^{(e'')} M^{e''} + \text{ec.} + G^{(e^{f-1})} M^{(e^{f-1})} + G^{(e^f)} M^{e^{(f)}} = 0,$$

e però la

$$G^{(e)} + G^{(e')} M^{e'-e} + G^{(e'')} M^{e''-e} + \text{ec.} + G^{(e^{f-1})} M^{(e^{f-1})-e} + G^{(e^f)} M^{(e^f)-e} = 0. \quad \text{(XLIV)}$$

Essendo radici di quest' ultima Equazione tutte le potenze M'^k, M''^k, M'''^k, ec. $M^{(f)k}$ (n.° 19.); le quali sono di numero f, ed essendo tali solo esse; dalla (XLIV) apparisce dover essere $e' - e = k$, $e'' - e = 2k$, $e''' - e = 3k$, ec. $e^{(f-1)} - e = (f-1)k$, $e^{(f)} - e = fk$; ma dalle precedenti Equazioni esprimenti il valore di β con le successive sostituzioni, ritraesi

$$r^{(e')} = (e' - e)\beta + r^{(e)},$$

$$r^{(e'')} = (e'' - e')\beta + r^{(e')} = (e'' - e)\beta + r^{(e)},$$

$$r^{(e''')} = (e''' - e'')\beta + r^{(e'')} = (e''' - e)\beta + r^{(e)},$$

ec.

$$r^{(e^f)} = (e^{(f)} - e^{(f-1)})\beta + r^{(e^{f-1})} = (e^{(f)} - e)\beta + r^{(e)};$$

dunque sarà

$$r^{(e')} = k\beta + r^{(e)},\ r^{(e'')} = 2k\beta + r^{(e)},\ r^{(e''')} = 3k\beta + r^{(e)},\ \text{ec. } r^{(e^f)} = fk\beta + r^{(e)},$$

ossia

$$\beta = \frac{r^{(e')} - r^{(e)}}{k} = \frac{r^{(e'')} - r^{(e)}}{2k} = \frac{r^{(e''')} - r^{(e)}}{3k} = \text{ec.} = \frac{r^{(e^f)} - r^{(e)}}{fk} = -\frac{p}{k},$$

e però

$$r^{(e)} - r^{(e')} = p,\ r^{(e)} - r^{(e'')} = 2p,\ r^{(e)} - r^{(e''')} = 3p,\ \text{ec. } r^{(e^f)} = fp.$$

Inoltre dalla forma della (XXIII) chiaramente si vede dover essere $r^{(e)}$ non $< e$, $r^{(e')}$ non $< e'$, $r^{(e'')}$ non $< e''$, ec.; potendosi dunque supporre $r^{(e)} = e + a$, $r^{(e^f)} = e^{(f)} + a'$, dove a, a' siano due numeri interi non minori dello zero, ed il primo non $> m - e$, il secondo non $> m - e^{(f)}$; otterremo con la sostituzione de' valori trovati,

$r^{(e^f)} = fk\beta + r^{(e)} = fk \times -\frac{p}{k} + e + a = fk + e + a'$, e per conseguenza $a' = a - f(k + p)$. Finalmente osserviamo dovere nella (XXIII) esistere di necessità uno o più termini della prima linea orizzontale, perchè, se mancassero tutti, il primo membro di essa Equazione sarebbe divisibile esattamente per y_1, e quindi il primo membro della (III) esattamente per $y - L'x$ contro del (n.° 1.); di più osserviamo essere $-\frac{p}{k}$ per l' ipotesi l' esponente più piccolo di tutte le iperbole assintotiche alla supposta Curva. Dunque per la nota al (n.° 69.) il primo termine della serie (XLII) dovendo contenere β moltiplicato pel minimo esponente della y_1 nella (XXIII); ed essendo questo minimo esponente lo zero, ne segue, che dovrà essere $e = 0$, e per conseguenza 1.° il termine primo della Serie (XLII) sarà $m - r^{(e)} = m - r$, e nella (XL) (n.° 69.) avremo G necessariamente diverso dallo zero; 2.° risulterà $e' = k$, $e'' = 2k$, $e''' = 3k$, ec. $e^{(f-1)} = (f-1)k$, $e^{(f)} = fk$; 3.° otterremo $r^{(e)} = r = a$, $r^{(e^f)} = fk + a'$.

1.° Ciò posto, prendo i due numeri n, a, e diviso il primo di essi per k, il secondo per $k+p$, supponghiamo risultare $\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$; in questa ipotesi io dico, che dovrà essere $f=\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$. Difatti dalla supposta $\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$ avendosi $n=\frac{a}{1+\frac{p}{k}}$ $=\frac{a}{1-\beta}$, ne verrà $n-n\beta=a$, ossia $n-n\beta=r^{(e)}$, giacchè abbiamo $r^{(e)}=a$, e finalmente $m-n+\beta n=m-r^{(e)}$; ora per essere $e=0$, come si è poc'anzi osservato, $m-r^{(e)}$ è il primo termine della Serie (XLII); dunque sarebbe termine della Serie medesima ancora $m-n+n\beta$, mentre nella (XXIII) e però nella (XL) sussistesse il termine $A^{(n)}x^{m-n}y_1^{n}$; ma tal termine realmente vi esiste, perchè dev'essere $A^{(n)}$ diverso dallo zero (n.° 69.) dunque nella fatta ipotesi di $\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$ dovrà l'esposto $m-n+n\beta$ essere termine della (XLII); aggiungo poi, che ne sarà il termine ultimo, ossia sarà identico con $m-r^{(e')}+e^{(f)}\beta$; imperciocchè se ciò non fosse, ne verrebbe $e^{(f)}>n$, e però $fk>n$, il che non può essere (n.° 20.). Dunque risultando $e^{(f)}=n$, $r^{(e')}=n$, ed essendo $r^{(e')}=e^{(f)}+a'$, ne verrà $fk=n$, $a'=0$, e però $a-f(k+p)=0$, e in fine $f=\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$. Pertanto in questa prima supposizione il quoto stesso $\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$ ci somministrerà il chiesto valore di f.

Avvertasi dovere in questo caso n risultare divisibile esattamente per k, ed a per $k+p$, onde se ne ottenga il numero f necessariamente intero. Difatti essendo $v'=Mx^{-\frac{p}{k}}$

l' espressione generica delle iperbole supposte, gli esponenti k, p dovranno od essere numeri primi tra loro, od essere ciascuno di essi $= 1$; poichè se tali esponenti si volessero tra loro composti, e si volesse per esempio $k = hi$, $p = hl$, essendo $h > 1$, l' Equazione vera dell' iperbola non sarebbe già $v' = Mx^{-\frac{p}{k}}$, ossia $v' = Mx^{-\frac{hl}{hi}}$, ma bensì $v' = Mx^{-\frac{l}{i}}$: ora se k, p sono numeri primi fra loro, tali fra loro sono eziandio k, $k + p$; e ciò essendo, non può giammai verificarsi l' Equazione $\frac{n}{k} = \frac{a}{k+p}$, quando non sia n esattamente divisibile per k, ed a per $k + p$. Dunque ec. Che se si voglia $k = 1$, $p = 1$; allora essendo già $\frac{n}{k} = \frac{n}{1} = n$ numero intero, tale sarà ancora l' altro $\frac{a}{k+p} = \frac{a}{2}$, che gli si vuole uguale.

2.° Abbiasi il numero $\frac{n}{k}$ diverso dall' altro $\frac{a}{k+p}$. Risultando in questo caso $m - n + n\beta$ disuguale da $m - r^{(e)}$, non potrà costituire, come nel (precedente 1.°), uno dei termini della serie (XLII); e il termine per conseguenza $A^{(n)}x^{m-n}y^{n}$, non potendo essere contenuto nella Equazione (XLIII) sarà diverso dall' ultimo di essa $G^{(e^f)}x^{m-r^{(e^f)}}y_1^{e^{(f)}}$, e però avremo l'esponente $e^{(f)}$ diverso dall'esponente n; ma $e^{(f)} = fk$, ed fk non $> n$ (n.° 20.). Dunque in questa ipotesi dovrà essere $fk < n$; e per conseguenza avendosi $e^{(f)} < n$; dovrà essere $r^{(e^f)} > e^{(f)}$, perchè dalla (XXIII) apparisce, che non ne può essere giammai minore; e se si volesse $r^{(e^f)} = e^{(f)}$, il termine $G^{(e^f)}x^{m-r^{(e^f)}}y_1^{e^{(f)}}$ altro non sarebbe che $A^{(e^f)}x^{m-e^{(f)}}y_1^{e^{(f)}}$ e questo deve mancare dalla (XXIII), e però dalla (XLII), perchè avendosi $e^{(f)} < n$,

esser deve $A^{(ef)} = 0$ (n.° 69.). Dunque risultando nel valore $r^{(\overset{f}{e})} = e^{(f)} + a'$ il numero $a' > 0$, ne verrà $a - f(k+p) > 0$; e per conseguenza, allorquando i due numeri $\frac{n}{k}$, $\frac{a}{k+p}$ sono disuguali fra loro, avremo $f < \frac{n}{k}$, ed $f < \frac{a}{k+p}$. Aggiungo in questo caso di $\frac{n}{k}$ non $= \frac{a}{k+p}$ dover essere $\frac{a}{k+p} < \frac{n}{k}$. Imperciocchè se fosse al contrario $\frac{n}{k} < \frac{a}{k+p}$, ne verrebbe $n + n\frac{p}{k} < a$, e però $\frac{n-a}{n} < -\frac{p}{k}$. Ma $\frac{n-a}{n}$ è il valore, che risulta per β dal paragone della quantità $m - a$ con l'altra $m - n + n\beta$; inoltre a cagione di essere $e = 0$, e però $r^{(e)} = a$, ed $r^{(e)} = r$, abbiamo $m - a$ primo termine della Serie (XLI), e per essere il coefficente $A^{(n)}$ necessariamente diverso dallo zero (n.° 69.), il termine $m - n + n\beta$ esiste necessariamente nella citata Serie (XLI). Dunque essendo $\frac{n-a}{n}$ uno dei valori di β, che il metodo della nota al (n.° 69.) ci somministra; e allorchè si volesse $\frac{n}{k} < \frac{a}{k+p}$, risultando $\frac{n-a}{n} < -\frac{p}{k}$; ne segue, che il minimo esponente delle iperbole assintotiche alla nostra Curva con lo stesso assintoto rettilineo $y = L'x$ non sarebbe più $-\frac{p}{k}$, ma bensì $-\frac{a-n}{n}$, il che è contro la supposizione. Ora nelle prime n linee della (XXIII) eccettuati i primi A, A', A'', A''', ec. $A^{(n-1)}$, i quali tutti sono $= 0$ (n.° 69.), tutti gli altri coefficienti B, B', B'', ec. $B^{(n-1)}$, C, C', C''. ec. $C^{(n-1)}$, ec. possono essere e non essere zero, rimanendo però, per quanto si è detto poc'anzi, nella linea prima un coefficiente G necessariamente dallo zero diverso, onde si ha

$a>0$, ed a non $>m$. Dunque il numero f, purchè abbia un valore minore di $\frac{a}{k+p}$, ed intero, potendo uguagliare uno qualsivoglia dei numeri 0, 1, 2, ec.; ne viene che chiamato π l'intero prossimamente $<\frac{a}{k+p}$, potrà esso f in questo 2°. caso essere uguale ad uno qualunque dei numeri 0, 1, 2, 3, ec. π.

3.° I valori finalmente dei coefficienti M', M'', ec. $M^{(f)}$ si otterranno dalla soluzioue della Equazione (XLIV) divenuta per quanto si è detto fin quì

$$G+G^{(k)}M^{k}+G^{(2k)}M^{2k}+G^{(3k)}M^{3k}+\text{ec.}+G^{((f-1)k)}M^{(f-1)k}+G^{(fk)}M^{fk}=0\,,$$

i coefficienti G, $G^{(k)}$, ec. della quale non sono che i coefficienti della (XLIII), ossia di quei termini nelle linee *prima* $(k+1)$*esima*, $(2k+1)$*esima*, $(3k+1)$*esima*, ec. $(fk+1)$*esima* della Equazione (XXIII), nei quali gli esponenti della x sono rispettivamente $m-r^{(e)}=m-a$, $m-r^{(e')}=m-(a-p)$, $m-r^{(e'')}=m-(a-2p)$, $m-r^{(e''')}=m-(a-3p)$, ec. $m-r^{(e^f)}=m-(a-fp)$. Rimanendo il numero a indeterminato; gli daremo quel valore, che nei diversi casi particolari converrà.

Sia per esempio il valore dell' esponente $m=4$, sia $n=2$, e sia $k=1$, $p=1$; e potendo il numero $r^{(e)}=a$ acquistare uno dei valore 1, 2, 3, 4, vogliasi in primo luogo $a=4$. Avendosi quindi $\frac{n}{k}=\frac{2}{1}=2$, $\frac{a}{k+p}=\frac{4}{2}=2$, pel (prec. 1.°) dirò essere $f=2$, e $G+G'M+A''M^2=0$ sarà in corrispondenza l'Equazione generale, da cui dipendono i due valori M', M''. Che se si voglia $a=3$; allora risultando $\frac{a}{k+p}=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}<\frac{n}{k}$ pel (preced. n.° 2.°) dirò essere $f=1$, divenendo $G+G'M=0$ la corrispondente Equazione in M; e dirò essere $f=0$ nelle ipotesi di $a=2$, e di $a=1$.

74. Venga richiesto, che la Curva dell' Equazione (III) sia fornita relativamente allo stesso assintoto rettilineo $y=L'x$ di tanti rami, de' quali un numero $2f$ si accosti ai rami di un numero f d' iperbole della specie $v'=Mx^{-\frac{p}{k}}$ (n.° prec.); un numero $2f'$ si avvicini ai rami di altre f' iperbole della specie $v'=Mx^{-\frac{p'}{k_1}}$; un numero $2f''$ ai rami di altre f'' iperbole della specie $v'=Mx^{-\frac{p''}{k_2}}$, ec., ed infine un numero $2f^{(b)}$ si accosti ai rami di altre $f^{(b)}$ iperbole della specie $v'=Mx^{-\frac{p^{(b)}}{k_b}}$, nelle quali specie gli esponenti $-\frac{p}{k}$, $-\frac{p'}{k_1}$ $-\frac{p''}{k_2}$, ec. $-\frac{p^{(b)}}{k_b}$ siano di valore costante, il primo $-\frac{p}{k}$ sia l' esponente minimo delle iperbole assintotiche supposte, l' ultimo $-\frac{p^{(b)}}{k_b}$ il massimo, gl' intermedii vadano gradatamente crescendo, cosicchè si abbia $-\frac{p}{k}<-\frac{p'}{k_1}<-\frac{p''}{k_2}$ $<$ ec. $<-\frac{p^{(b)}}{k_b}$, e finalmente i coefficienti M variino passando da Equazione ad Equazione. Dimandansi ora tutti i valori, che può ottenere ciascuno dei numeri f, f', f'', ec. $f^{(b)}$, ferme restando le condizioni, che riguardo all' esponente m, ed ai coefficienti della (III) si sono poste nel Quesito del (n.° precedente).

1.° Operando come nel (n.° prec.), determino in primo luogo il valore od i valori di f esprimente il numero delle iperbole della specie $v'=Mx^{-\frac{p}{k}}$, e determino i valori corrispondenti di M. In seguito a norma del metodo della nota (n.° 69.) prendo l' esponente $m-r^{(ef)}+e^{(f)}\beta$ ultimo della

Serie (XLII), paragono questo con gli ulteriori della Serie (XLI), e supposto da ciò risultarci i termini

(XLV) $$m-r^{(e^{f})}+e^{(f)}\beta,\ m-r^{(e^{f+1})}+e^{(f+1)}\beta,\ m-r^{(e^{f+2})}+e^{(f+2)}\beta,\ \text{ec.}\ m-r^{(e^{f+f'})}+e^{(f+f')}\beta,$$

i quali tutti, essendo uguali tra loro, ci somministrino per β il valore $-\frac{p'}{k_1}$; con discorsi perfettamente simili a quelli del (n.° prec.), vedremo, che la (XXIII), fattosi $x=\infty$, si converte in corrispondenza nella

(XLVI) $$G^{(e^{f})}x^{m-r^{(e^{f})}}y_1^{e^{(f)}}+G^{(e^{f+1})}x^{m-r^{(e^{f+1})}}y_1^{(e^{f+1})}+G^{(e^{f+2})}x^{m-r^{(e^{f+2})}}\times y_1^{e^{(f+2)}}+\text{ec.}+G^{(e^{f+f'})}x^{m-r^{(e^{f+f'})}}y_1^{e^{(f+f')}}=0$$

che quindi pei valori di M avremo l' Equazione

(XLVII) $$G^{(e^{f})}+G^{(e^{f+1})}M^{e^{(f+1)}-e^{(f)}}+G^{(e^{f+2})}M^{e^{(f+2)}-e^{(f)}}+\text{ec.}+G^{(e^{f+f'})}M^{e^{(f+f')}-e^{(f)}}=0$$

d' onde si ritrae

$$e^{(f+1)}-e^{(f)}=k_1,\ e^{(f+2)}-e^{(f)}=2k_1,\ e^{(f+3)}-e^{(f)}=3k_1,\ \text{ec.}\ e^{(f+f')}-e^{(f)}=f'k_1;$$

vedremo inoltre ottenersi

$$\beta=\frac{r^{(e^{f+1})}-r^{(e^{f})}}{k_1}=\frac{r^{(e^{f+2})}-r^{(e^{f})}}{2k_1}=\frac{r^{(e^{f+3})}-r^{(e^{f})}}{3k_1}=\text{ec.}=\frac{r^{(e^{f+f'})}-r^{(e^{f})}}{f'k_1}=-\frac{p'}{k_1},$$

e però essere

$$r^{(e^{f})}-r^{(e^{f+1})}=p'\ r^{(e^{f})}-r^{(e^{f+2})}=2p',\ r^{(e^{f})}-r^{(e^{f+3})}=3p',\ \text{ec.}\ r^{(e^{f})}-r^{(e^{f+f'})}=f'p';$$

e vedremo finalmente, che essendo $r^{(e^f)} = e^{(f)} + a'$, dove si ha a' non < 0, e non $> m - e^{(f)}$ (n.° prec.), e posto $r^{(e^{f+f'})} = e^{f+f'} + a''$, dove a'' sia non < 0, e non $> m - e^{(f+f')}$, vedremo, dissi, ottenersi $a'' = a' - f'(k_1 + p')$.

2.° Ciò determinato, prendo le due quantità $n - fk$, $a' = a - f(k + p)$ (n.° prec.), divido quella per k_1, questa per $k_1 + p'$; e se i due quoti risultano uguali fra loro, io dico, che dovrà essere $f' = \frac{n-fk}{k} = \frac{a'}{k_1+p'}$. Imperciocchè dall' uguaglianza degli accennati quoti avendosi $n - fk = \frac{a'}{1 + \frac{p'}{k_1}}$, essendo $fk = e^{(f)}$ (n.° prec.) $a' = r^{(e^f)} - e^{(f)}$, ed esprimendo in questo caso $-\frac{p'}{k_1}$ il valore di β, ne verrà $n - e^{(f)} = \frac{r^{(e^f)} - e^{(f)}}{1 - \beta}$, e però $r^{(e^f)} - e^{(f)}\beta = n - n\beta$, e finalmente $m - r^{(e^f)} + e^{(f)}\beta = m - n + n\beta$. Dunque essendo $m - r^{(e^f)} + e^{(f)}\beta$ il primo termine della Serie (XLV), e d' altronde non potendo essere $fk + f'k_1 > n$ (n.° 18.), ed essendo $e^{(f+f')} = e^{(f)} + f'k_1 = fk + f'k_1$ (n.° prec.) con un discorso perfettamente uguale a quello, che si è fatto nel (1.° n.° 73.), vedremo dovere $m - n + n\beta$ essere identico col termine ultimo $m - r^{(e^{f+f'})} + e^{(f+f')}\beta$; onde risulta $e^{(f+f')} = n = r^{(e^{f+f'})}$, e per conseguenza a cagione di essere $e^{(f+f')} = fk + f'k_1$, e di essere $r^{(e^{f+f})} = e^{(f+f')} + a''$, otterremo $fk + f'k_1 = n$, $a'' = a' - f'(k_1 + p') = 0$, e finalmente $f = \frac{n-fk}{k} = \frac{a'}{k_1+p'}$. Quì ancora col discorso medesimo del

(1.° n.° 73.) si dimostra, che mentre ha luogo l' esposta uguaglianza, esser dee $n - fk$ divisibile esattamente per k_1, ed a' per $k_1 + p'$.

3.° Che se si trovino i due quozienti $\frac{n-fk}{k_1}$, $\frac{a'}{k_1+p'} = a - f(k+p)$ (n.° prec.) tra loro disuguali; allora dovendo le quantità $m - n + n\beta$, $m - r^{(e^{f+f'})} + e^{(f+f')}\beta$ risultare esse pur disuguali, dovrà essere $e^{(f+f')} < n$, perchè mentre per l' indicata ineguaglianza si ha $e^{(f+f')}$ non $= n$, si ha ancora $e^{(f+f')} = fk + f'k_1$, ed $fk + f'k_1$ non $> n$; ma in conseguenza di ciò, come nel (2.° n.° 73.) si trova dover esser $r^{(e^{f+f'})} > e^{(f+f')}$, perchè se si volesse $r^{(e^{f+f'})} = e^{(f+f')}$; nella (XXIII) dovrebbe esistere il termine $A^{(e^{f+f'})} x^{m-e^{(f+f')}} y_1^{e^{(f+f')}}$, il che non può essere, giacchè avendosi $e^{(f+f')} < n$, pel (n.° 69.) esser dee $A^{(e^{f+f'})} = 0$. Dunque nella Equazione $r^{(e^{f+f'})} = e^{(f+f')} + a''$, dovendo essere $a'' > 0$, risulterà eziandio $a' - f'(k_1 + p') > 0$, e però $f' < \frac{a'}{k_1+p'}$. Inoltre io dico, dover risultare $\frac{a'}{k_1+p'} < \frac{n-fk}{k_1}$: e difatti se si volesse al contrario, $\frac{n-fk}{k_1} < \frac{a'}{k_1+p'}$, venendone $n - fk < \frac{a'}{1+\frac{p'}{k_1}}$, $(n-fk\ (n-fk)\frac{p'}{k_1} < a'$, $n - e^{(f)} + (n - e^{(f)})\frac{p'}{k_1} < r^{(e^f)} - e^{(f)}$, si avrebbe $\frac{n-r^{(e')}}{n-e^{(f)}} < -\frac{p'}{k_1}$: ma $\frac{n-r^{(e^f)}}{n-e^{(f)}}$ è il valore, che ottienesi per β dall' uguaglianza delle due quantità $m - r^{(e^f)} + e^{(f)}\beta$, $m - n\beta$ esistenti en-

trambe necessariamente nella Serie (XLI). La prima per ipotesi, la seconda per essere $A^{(n)}$ non $=0$ (n.° 69.). Dunque se fosse $\frac{n-fk}{k_1} < \frac{a'}{k_1+p'}$, pel solito metodo della nota al (n.° 69.) il valore di β, che succede immediatamente al primo $-\frac{p}{k}$ non sarebbe più $-\frac{p'}{k_1}$, ma $\frac{n-r^{(e^f)}}{n-e^{(f)}}$, e dopo la prima iperbola assintotica della Equazione $v'=Mx^{-\frac{p}{k}}$ succederebbe tostamente come seconda l'iperbola della Equazione $v'=Mx^{-\frac{r^{(e^f)}-n}{n-e^{(f)}}}$; ma ciò non può essere perchè contrario alla supposizione. Dunque ec. Chiamato pertanto π' l' intero prossimamente $< \frac{a'}{k_1+p'}$, concluderemo quì ancora, come nel (2.° n.° 73.), che può essere valore di f' uno qualsivoglia dei numeri 0, 1, 2, ec. π'.

4.° L' Equazione (XLVII) in fine divenuta

$$G^{(fk)}+G^{(fk+k_1)}M^{k_1}+G^{(fk+2k_1)}M^{2k_1}+\text{ec.}+G^{(fk+f'k_1)}M^{f'k_1}=0$$

ci somministrerà i valori diversi di M nell f' Equazioni della specie $v'=Mx^{-\frac{p'}{k_1}}$. In essa Equazione poi i coefficienti $G^{(fk)}$, $G^{(fk+k_1)}$, $G^{(fk+2k_1)}$ ec. $G^{(fk+f'k_1)}$ altro non sono che i coefficienti della (XLVI), ossia i coefficienti nella (XXIII) dei termini, i quali nelle linee $(fk+1)$*esima*, $(fk+k_1+1)$*esima*, $(fk+2k_1+1)$*esima*, ec. $(fk+f'k_1+1)$*esima* moltiplicano rispettivamente le potenze

$$x^{m-(a-fp)},\ x^{m-(a-fp-p')},\ x^{m-(a-fp-2p')},\ x^{m-(a-fp-f'p')}.$$

5.° Per ottenere il valore di f''; divido la quantità $n-fk-f'k_1$ per k_2, e l' altra $a''=a'-f'(k_1+p')=a-f(k+p)-f'(k_1+p')$ per k_2+p''; e se ritrovo i quoti

$\frac{n-fk-('k_1)}{k_2}$, $\frac{a''}{k+p''}$ tra loro uguali, dirò essere ad essi uguale anche f''; che se risultano questi disuguali, dovrà anche quì il primo di loro superare il secondo, e chiamato allora π'' l' intero prossimamente $< \frac{a''}{k_2+p''}$, dirò, che potrà essere valore di f'' uno dei numeri 0, 1, 2, ec. π''. La dimostrazione di questo metodo è perfettamente simile a quella dei metodi, per cui sonosi ottenuti precedentemente i valori di f, e di f'; avvertendo, che quivi la Serie degli esponenti somiglianti alle due (XLII), (XLV), dalla quale si ha $\beta = -\frac{p''}{k_2}$, ha per primo il termine $m - r^{(e^{f+f'})} + e^{(f+f')}\beta$, e per ultimo, il termine $m - r^{(e^{f+f'+f''})} + e^{(e^{f+f'+f''})}\beta$, che si ha $e^{(f+f'+f'')}$ $= e^{(f+f')} + f''k_2 = fk + f'k_2 + f''k_2$, $r^{(e^{f+f'+f''})} = r^{(e^{f+f'})} - f''p''$ $= e^{(f+f'')} + a'' - f''p''$; che si pone $r^{(e^{f+f'+f''})} = e^{(f+f'+f'')} + a'''$, onde risulta $a''' = a'' - f''(k_2 + p'')$; e che in fine esser deve $fk + fk_1 + f''k_2$ non $> n$. I valori poi di M nelle f'' Equazioni della specie $v' = \mathrm{M}x^{-\frac{p''}{k_2}}$, come di sopra, troveremo comprendersi nella Equazione

$$\mathrm{G}^{(e^{fk+f'k_1})} + \mathrm{G}^{(e^{fk+f'k_1+k_2})}\mathrm{M}^{k_2} + \mathrm{G}^{(e^{fk+f'k_1+2k_2})}\mathrm{M}^{2k_2} + \text{ec.}$$
$$+ \mathrm{G}^{(e^{fk+f'k_1+f''k_2})}\mathrm{M}^{f''k_2} = 0,$$

i coefficienti della quale non sono, che i coefficienti nelle linee $(k+f'k_1+1)$*esima*, $(fk+fk_2+1)$*esima*, $(fk+f'k_1+2k_2+1)$*esima*, ec. $(fk+f'k_1+f''k_2+1)$*esima* della Equazione (XXIII) delle podestà $(m-(a-fp-f'p'))$*esima*, $(m-(a-fp-f'p'-p''))$*esima*, $(m-(a-fp-f'p'-2p''))$*esima*, ec. $(m-(a-fp-f'p'-f''p''))$*esima* della x.

6.° Proseguendo innanzi, ed operando sempre in somigliante maniera, otterremo i successivi valori f''', f^{iv}, ec. e i corrispondenti di M; e così ricaveremo infine il valore $f^{(b)}$ coll' ottenere, e paragonare tra loro i due quoti $\frac{n-fk-f'k_1-f''k_2-\text{ec.}-f^{(b-1)}k_{b-1}}{k_b}$,

$$\frac{a^{(b-1)}}{k_b+p^{(b)}}=\frac{a-f(k+p)-f'(k_1+p')-f''(k_2+p'')-\text{ec.}-f^{(b-1)}(k_{b-1}+p^{(b-1)})}{k_b+p^{(b)}},$$

asserendo, che esso $f^{(b)}$ uguaglia i quoti medesimi, allorchè sono uguali fra loro, e che quando sono disuguali, uguaglia uno qualsivoglia dei numeri 0, 1, 2, ec., fino a $\pi^{(b)}$, chiamandosi $\pi^{(b)}$ l' intero prossimamente $<\frac{a^{(b-1)}}{k_b+p^{(b)}}$. I coefficienti poi M di queste ultime Equazioni della specie $v'=Mx^{\frac{p^{(b)}}{k_b}}$ si determineranno dalla soluzione di un' Equazione contenente nei successivi termini le successive potenze M^0, M^{k_b}, M^{2k_b}, ec. $M^{f^{(b)}k_b}$, e i coefficienti della quale non sono che i coefficienti nella (XXIII) dei termini, che nelle linee $(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_b+1)$*esima*, $(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+k_b+1)$*esima*, $(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+2k_b+1)$*esima* ec. $(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+f^{(b)}k_b+1)$*esima* contengono rispettivamente le podestà della x.

$(m-(a-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)}))$*esima*, $(m-(a-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)}-p^{(b)}))$*esima*, $(m-(a-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}-2p^{(b-1)}))$*esima*, ec. $(m-(a-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)}-f^{(b)}p^{(b)}))$*esima*.

75. 1.° Nella successiva determinazione dei numeri f, f', f'', f''', ec. (n.^{i} 73, 74.) se mai succeda, che si verifichi l'uguaglianza fra i due quoti, che abbiamo detto doversi nella pratica operazione paragonare fra loro; se corrispondentemente per esempio al numero f'' si trovi essere $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2} = \frac{a-f(k+p)-f'(k_1+p')}{k_2+p''}$; allora io dico, che tutti i succedenti valori, nell' esempio nostro f''', f^{iv}, ec. sono zero; e la dimostrazione di questa verità deducesi egualmente dall' osservare, che per l' esposta uguaglianza il successivo valore di a, nel caso nostro a''' dev' essere $=0$ (n.^{i} 73, 74.).

2.° Se mai risultasse $\frac{n}{k} < \frac{a}{k+p}$ (2.° n.° 73, 1.° n.° 74.) allora per quanto si è colà dimostrato, non potranno le iperbole dell'Equazione $v'=Mx^{-\frac{p}{k}}$ supporsi l' iperbole assintotiche alla Curva della Equazione (III) di esponente minimo: perchè ne diviene assintotica anche l' iperbola dell' Equazione $v'=Mx^{-\frac{a-n}{n}}$, e frattanto si ha $-\frac{a-n}{n} < -\frac{p'}{k}$. In questo caso, se mai si volesse, che f ci esprimesse il numero delle iperbole assintotiche della specie $v'=Mx^{-\frac{a-n}{n}}$; vedesi, che si otterrà $f=\frac{n}{n} = \frac{a}{n+(a-n)} = 1$ (1.° n.° 73.), e pel (1.° prec.) si avrà $f'=0$, $f''=0$, ec.

Sia nel (3.° n.° 74.) $\frac{n-fk}{k_1} < \frac{a'}{k_1+p'}$, non si esprimerano in questo caso dalla $v'=Mx^{-\frac{p'}{k_1}}$ le seconde delle iperboli assintotiche supposte nel (n.° 74.); perchè mentre risulta

$\frac{n-r^{(e^f)}}{n-e^{(f)}} < -\frac{p'}{k_1}$, divengano iperbole assintotiche quelle eziandio dell' Equazione $v' = Mx^{-\frac{r^{(e^f)}-n}{n-e^{(f)}}}$. Volendosi poi quì ancora, che f ci rappresenti il numero di queste ultime iperbole, ne verrà $f' = \frac{n-fk}{n-e^{(f)}} = \frac{a'}{n-e^{(f)}+r^{(e^f)}-n} = 1$, e sarà zero ciascuno degli ulteriori numeri f'', f''', ec.; così in progresso.

3.° Per le ipotesi fatte (n.^{i} 73, 74.) sono nella (XXIII) arbitrarii tutti i coefficienti a riserva degli A, A', A'', ec. $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$, e G dell' ultimo $a^{(m)}$, dei quali i primi A, A', A'', ec. $A^{(n-1)}$ sono tutti zero, e i tre G, $A^{(n)}$, $a^{(m)}$ dallo zero necessariamente diversi (n.^{i} 69. 37.). Dunque per la supposta arbitrarietà potrà l' esponente $-\frac{p}{k}$, purchè si faccia non $> -\frac{a-n}{n}$ (n.^{i} 73, 74.) supporsi qualunque, e determinati in seguito i coefficienti della (XXIII) opportunamente, avremo la soluzione corrispondente dei problemi proposti (n.^{i} 73, 74.). Così all' esponente $-\frac{p'}{k_1}$ (n.° 74.), purchè sia $> -\frac{p}{k}$ e non $> -\frac{r^{(e^f)}-n}{n-e^{(f)}} = -\frac{fk+a'-n}{n-fk}$, potrà attribuirsi un qualsivoglia valore, e determinati da ciò convenientemente i coefficienti della (XXIII), il Problema del (n.° 74.) ammetterà in corrispondenza scioglimento. Lo stesso si dice riguardo all' esponente $-\frac{p''}{k_2}$; purchè sia questo $> -\frac{p'}{k_1}$, e non $> \frac{r^{e^{(f+1)}}-n}{n-e^{(f+1)}} = -\frac{fk+f'k_1+a''-n}{n-fk-f'k_1}$. Così di seguito.

4.° Se mai l' Equazione della Curva, la quale si vuole fornita de' rami iperbolici, che abbiamo supposti nei (n.^{i}

73, 74.), non abbia i coefficienti arbitrarj a norma della ipotesi fatta nei citati (n.^{i} 73, 74.), ma abbia i suoi coefficienti di valore già determinato: allora è chiaro, che i Problemi degli stessi (n.^{i} 73, 74.) non ammettono soluzione, se non quando nella Equazione (XXIII) i primi termini a sinistra delle linee prima, $(k+1)$*esima*, $(2k+1)$*esima* ec. $(fk+1)$*esima* $(fk+k_1+1)$*esima*, $(fk+2k_1+1)$*esima*, ec. $(fk+f'k_1+1)$*esima* ec. non superino pel (n.° 27.) le potenze della x, che abbiamo accennate nei predetti (n.^{i} 73, 74.); e mentre le rispettive Equazioni in M abbiano le loro radici reali.

5.° Rimanendo il numero $a=r^{(e)}$ (n.° 73.) indeterminato, potrà in generale avere uno qualsivoglia dei valori interi che sono >0, e non $>m$; osservando però, che da esso viene sempre rappresentato quel numero, il quale nel primo termine esistente nella prima linea della Equazione (XXIII) sottraesi nell'esponente della x dal numero m.

Pongasi ad esempio una Curva, nella Equazione della quale sia $a=12$, e sia $n=5$; e vogliansi determinare i numeri $2f$, $2f'$, $2f''$ dei rami, che in essa avvicinansi ai rami delle tre iperbole $v'=\mathrm{M}x^{-2}$, $v'=\mathrm{M}x^{-1}$, $v'=\mathrm{M}x^{-\frac{1}{2}}$ riferite al medesimo assintoto $y=\mathrm{L}'x$. Avendosi in questo caso $k=1$, $p=2$, $k_1=1$, $p'=1$, $k_2=2$, $p''=1$, ed avendosi $\frac{p}{k}=2$, $\frac{a-n}{n}=\frac{12-5}{5}=\frac{7}{5}$, onde risulta $-\frac{p}{k}<\frac{a-n}{n}$; il nostro Problema ammetterà in corrispondenza soluzione (prec. 3.°), e trovati quindi i valori dei quoti $\frac{n}{k}$, $\frac{a}{k+p}$, li paragono a norma dei (n.^{i} 73, 74.) fra di loro. Siccome risulta $\frac{n}{k}=5$, $\frac{a}{k+p}=4$, pel (2.° n.° 73.) dirò, che f può acquistare uno qualunque dei valori 0, 1, 2, 3. Avvertasi, che lo scioglimento del Problema, che pel (prec. 3.°) abbiamo concluso possibile, per avere osservato essere $-\frac{p}{k}<-\frac{a-n}{n}$, si sarebbe asserito possibile egualmente dall' osservazione, che si ha $\frac{a}{k+p}>\frac{n}{k}$,

giacchè come si è veduto nel (2.° n.° 73.) l'uno di questi rapporti trae seco l' altro. Diasi ad f l'ultimo dei valori suoi, cioè il valore 3 : poichè da ciò ottienesi $\frac{n-fk}{k_1} = \frac{5-3}{1} = 2$, $a' = a - f\,(k+p) = 12 - 9 = 3$, ed $\frac{a'}{k_1+p'} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}$; risulterà $f' = 0$. Ritenuto $f = 3$, sia $f' = 1$; avendosi quindi $\frac{n-fk-f'k_1}{k} = \frac{1}{2}$, $\frac{a''}{k_2+p''} = \frac{1}{3}$, dirò essere $f'' = 0$. Si attribuisca ad f il valor 2, derivando da ciò $\frac{n-fk}{k_1} = 3$, $\frac{a'}{k_1+p'} = 3$, si avrà $f' = 3$ (2.° n.° 74.) ed $f'' = 0$ (1.° n.° 75.). Dati infine ad f i valori 1, 0, giacchè ne viene in corrispondenza $\frac{n-fk}{k_1} = 4$, $\frac{a'}{k_1+p'} = 4\,\frac{1}{2}$, $\frac{n-fk}{k_1} = 5$, $\frac{a'}{k_1+p'} = 6$, ed in amendue i casi si ha $\frac{a'}{k_1+p'} > \frac{n-fk}{k_1}$; diremo, che il Problema non ammette rispettivamente soluzione; ossia posto, che la nostra Curva abbia due, oppur nessun ramo iperbolico della specie $v' = Mx^{-2}$, non può accadere, che ne abbia immediatamente dopo alcuno della specie $v' = Mx^{-1}$.

Ritenuto $a = 12$, sia $n = 6$. Anche in questo caso troveremo, che f può ottenere uno qualsivoglia dei valori 0, 1, 2, 3. Avendosi poscia $\frac{n-fk}{k_1} = 6 - f$, $\frac{a'}{k_1+p'} = \frac{12-3f}{2} = 6 - f - \frac{f}{2}$, ed essendo perciò $\frac{a'}{k_1+p'} < \frac{n-fk}{k_1}$, qualunque valor positivo diasi ad f, la soluzion del Problema è fin ad ora possibile sotto tutti e tre i valori 1, 2, 3; e quando si faccia $f = 0$ ne viene $f' = 6$, ed $f'' = 0$. Si faccia $f = 1$; poichè quindi si ha $\frac{n-fk}{k_1} = 5$, ed $\frac{a'}{k_1+p'} = 4\,\frac{1}{2}$, il numero f' potrà ricevere uno qualsivoglia dei valori 0, 1, 2, 3, 4. Risultando in seguito $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2} = \frac{5-f'}{2}$, $\frac{a''}{k_2+p''} = \frac{9-2f'}{3}$, vedremo agevolmente, che dipendentemente dai valori 0, 1, 2 di f', il numero f'' non può ottenere valore alcuno, che dipendentemente da $f' = 3$

si ha $f''=1$, e dipendentemente da $f'=4$ risulta $f''=0$. In egual modo potremo determinare quali siano i valori di f', e di f'', allorchè ad f attribuiscansi gli altri due valori 2, 3. Fra tutti i casi dell' esempio ora supposto non ve ne hanno che due, ne' quali ciascuno dei numeri f, f', f'' ottenga un valore >0, e tali sono quelli, ne' quali, posto $a=12$, ed $n=6$, risulta 1.° $f=1$, $f'=3$, $f''=1$; 2.° $f=2$, $f'=1$, $f''=1$. Nel primo poi di questi due casi i valori di M pei (3.° n.° 73, 4.°, 5.°, n.° 74.) dipenderanno rispettivamente dalle tre Equazioni $G+G'M=0$, $G'+G''M+G'''M^2+G^{IV}M^3=0$, $G^{VI}M=0$, dove G, G', G'', G''', G^{IV}, G^{VI} sono i coefficienti dei termini Gx^{m-12}, $G'x^{m-10}y_1$, $G''x^{m-9}y_1^2$, $G'''x^{m-8}y_1^3$; $G^{IV}x^{m-7}y_1^4$, $G^{VI}x^{m-6}y_1^6$ constituenti i primi termini nella (XXIII) delle linee prima, seconda, terza, quarta, quinta, e settima. I valori di M nel caso secondo verranno somministrati dalle Equazioni $G+G'M+G''M^2=0$, $G'''M=0$, $G'''+G^{IV}M=0$, i coefficienti delle quali sono quelli dei termini Gx^{m-12}, $G'x^{m-10}y_1$, $G''x^{m-8}y_1^2$ $G'''x^{m-7}y_1^3$, $G^{V}x^{m-6}y_1^5$, che dovranno esser primi nelle linee prima, seconda, terza, quarta, e sesta.

76. Vogliasi la Curva dell' Equazione (III) priva affatto di rami iperbolici aventi per assintoti la retta $y=L'x$, e dotata relativamente allo stesso diametro $y=L'x$, di $2f+2f'+2f''+$ ec. $+2f^{(c)}$ rami parabolici avvicinantisi ai rami di $f+f'+f''+$ ec. $+f^{(c)}$ Parabole, delle quali le prime f siano della specie $v'=Mx^{\frac{p}{k}}$, le seconde f' della specie $v'=Mx^{\frac{p'}{k_1}}$, le terze f'' della specie $v'=Mx^{\frac{p''}{k_2}}$, ec., e le ultime $f^{(c)}$ della specie $v'=Mx^{\frac{p^{(c)}}{k_c}}$; avendosi $\frac{p}{k}$ esponente minimo, $\frac{p^{(c)}}{k_c}$ esponente massimo, e gradatamente $\frac{p}{k} < \frac{p'}{k_1} < \frac{p''}{k_2} <$ ec. $< \frac{p^{(c)}}{k_c}$.

L'esponente poi i coefficienti della (III), e i diversi valori di M si considerano quivi, come consideraronsi nei (n.[i] 73, 74.) e si domandano i valori dei numeri f, f', f'', ec. $f^{(c)}$, ed i valori dei rispettivi coefficienti M.

Rinnovando i discorsi medesimi, che si sono fatti nei (n.[i] 73, 74.), troveremo agevolmente, che la soluzione del presente Problema è simile affatto a quella dei Problemi proposti nei cit.[i] (n.[i] 73, 74.) con questa sola differenza, che siccome i valori di β in questo luogo sono $\frac{p}{k}$, $\frac{p'}{k_1}$, $\frac{p''}{k_2}$, ec.; mentre colà erano $-\frac{p}{k}$, $-\frac{p'}{k_1}$, $-\frac{p''}{k_2}$, ec. devesi nelle quantità e formole colà determinate porre $-p$ in vece di p. Pertanto paragonerò le successive quantità $\frac{n}{k}$, $\frac{n-fk}{k_1}$, $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2}$, ec. $\frac{n-fk-f'k_1-\text{ec.}-f^{(c-1)}k_{c-1}}{k_c}$ rispettivamente con le altre $\frac{a}{k-p}$, $\frac{a'}{k_1-p'}=\frac{a-f(k-p)}{k_1-p'}$, $\frac{a''}{k_2-p''}=\frac{a-f(k-p)-f(k_1-p')}{}$, ec. $\frac{a^{(c)}}{k_c-p^{(c)}}=\frac{a-f(k-p)-f'(k_1-p')-\text{ec}-f^{(c-1)}(k_{c-1}-p^{(c-1)})}{k_c-p^{(c)}}$; e dirò essere $f=\frac{n}{k}$, $f'=\frac{n-fk}{k_1}$, $f''=\frac{n-fk-f'k_1}{k_2}$, ec. $f^{(c)}=\frac{n-fk-f'k_1-\text{ec.}-f^{(c)}k_{c-1}}{k_c}$ allorchè troverò in corrispondenza $\frac{n}{k}=\frac{a}{k+p}$, $\frac{n-fk}{k_1}=\frac{a'}{k_1-p'}$ $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2}=\frac{a''}{k_2-p''}$, ec. $\frac{n-fk-f'k_1-\text{ec}-f^{(c)}k_{c-1}}{k_c}=\frac{a^{(c)}}{k_c-p^{(c)}}$, come nei (1.° n.° 73; 1.°, 2.°, 5.°, 6.° n.° 74.) verificandosi quì ancora quanto si è detto nel (1.° n.° 75.), cioè che, quando si ha $f=\frac{n}{k}=\frac{a}{k-p}$, deve poi essere $f'=0$, $f''=0$, ec. $f^{(c)}=0$, quando non avendosi $f=\frac{n}{k}=\frac{a}{k-p}$ risulta poi $f'=\frac{n-fk}{k_1}=\frac{a''}{k_1-p'}$, deve divenire zero ciascuno degli f'', ec. $f^{(c)}$ e così di seguito. Che se vedrò non succedere le indicate

uguaglianze, se vedrò non essere $\frac{n}{k} = \frac{a}{k-p}$, dirò, come nel (2.° n.° 73, 1.°, 3.°, ec. n.° 74.) dover risultare $\frac{a}{k-p} < \frac{n}{k}$, e ciò essendo dirò, che f può ottenere uno qualunque dei valori 0, 1, 2, ec., estendendo questa serie fino inclusivamente all' intero prossimamente minore del numero $\frac{a}{k-p}$. Mentre, restando $\frac{a}{k-p} < \frac{n}{k_1}$ risulti eziandio $\frac{a'}{k_1-p'} < \frac{n-fk}{k_1}$ dirò, che ad f' può attribuirsi uno qualsivoglia dei valori 0, 1, 2, ec. fino inclusivamente all' intero prossimamente minore del quoto $\frac{a'}{k_1-p'}$. In egual modo la posizione di $\frac{a''}{k_2-p''} < \frac{n-fk-f'k_1}{k_2}$ unita alle altre due di $\frac{a'}{k_1-p'} < \frac{n-fk}{k_1}$, e di $\frac{a}{k-p} < \frac{n}{k}$ farà sì, che f'' potrà acquistare uno qualsivoglia dei valori 0, 1, 2, 3, ec., limite dei quali è l' intero prossimamente $< \frac{a''}{k_2-p''}$; e così di seguito. I valori infine de' coefficienti M deduconsi quì ancora da Equazioni in M simili alle determinate nei (n.^{i} 73, 74.), rapporto però alle quali deve aversi la riflessione, che siccome in questo caso si ha

$$\overset{(e')}{r} - \overset{(e)}{r} = p,\ \overset{(e'')}{r} - \overset{(e)}{r} = 2p,\ \overset{(e''')}{r} - \overset{(e)}{r} = 3p, \text{ ec. } \overset{(e^f)}{r} - \overset{(e)}{r} = fp \ (\text{n.° } 73.)$$

$$\overset{(e^{f+1})}{r} - \overset{(e^f)}{r} = p',\ \overset{(e^{f+2})}{r} - \overset{(e^f)}{r} = 2p,\ \overset{(e^{f+3})}{r} - \overset{(e^f)}{r} = 3p', \text{ ec. } \overset{(e^{f+f'})}{r} - \overset{(e^f)}{r} = f'p'$$

(n.° 74.) ec.

nelle potenze della x, i coefficienti delle quali deggiono diventare coefficienti delle Equazioni in M, e che abbiamo già determinate nei citati (n.^{i} 73, 74.), i numeri p, p', p'', p''', ec. debbono cangiarsi nei $-p$, $-p'$, $-p''$, $-p'''$, ec. Otterremo per esempio i coefficienti G, $G^{(k)}$, $G^{(2k)}$, ec. $G^{(fk)}$ (n.° 73.) dell' Equazione, che somministra gli f valori di M nelle Parabole della prima delle supposte specie, cioè della

$v' = Mx^{\frac{p}{k}}$, cangiando negli esponenti della x indicati nel (3.° n.° 73.) p in $-p$, e prendendo nelle linee prima, $(k+1)$*esima*, $(2k+1)$*esima*, ec. $(fk+1)$*esima* della (XXIII) i coefficienti delle potenze della x, che ne derivano, ossia prendendo nelle accennate linee i coefficienti delle potenze x^{m-a}, $x^{m-(a+p)}$, $x^{m-(a+2p)}$, ec. $x^{m-(a+fp)}$.

77. Poichè negli esponenti di quelle potenze della x nella (XXIII), che somministrano i coefficienti G, $G^{(k)}$, ec. per le Equazioni in M i numeri p, p', p'', ec. $p^{(c)}$ si deggiono non già sottrarre, come nei (3.° n.° 73; 4.° ec. n.° 74.), ma sommare con il numero a (n.° 76.); potrebbe accadere, che ne risultassero dei valori troppo grandi, e per opporci a questo inconveniente bisognerà trovare il limite de' valori medesimi, limite, il quale vedremo determinarcene un altro dei valori f, f', f'', ec. $f^{(c)}$, oltre quelli che sonosi stabiliti nel (n.° prec.^{e}). Prescindendo per brevità dalle podestà intermedie, le podestà della x principali, che si sono considerate nei (n.^{i} 73, 74, 76.), hanno per quanto si è detto nei numeri medesimi, nel caso nostro gli esponenti $m-a$, $m-(a+fp)$, $m-(a+fp+f'p')$, $m-(a+fp+f'p'+f''p'')$, ec. $m-(a+fp+f'p'+f''p''+\text{ec.}+f^{(c)}p^{(c)})$; ma la natura degli esponenti stessi esige, che le quantità, le quali si sottraggono da m, siano non $> m$. Dunque dovendo essere ciascuna delle a, $a+fp$, $a+fp+f'p'$, $a+fp+f'p'+f''p''$, ec. $a+fp+f'p'+f''p''+\text{ec.}+f^{(c)}p^{(c)}$ non $> m$; ne verrà in corrispondenza f non $> \frac{m-a}{p}$, f' non $> \frac{m-(a+fp)}{p'}$, f'' non $>$ $\frac{m-(a+fp+f'p')}{p''}$, ec. $f^{(c)}$ non $> \frac{m-(a+fp+f'p'+f''p''+\text{ec.})}{p^{(c)}}$. Se poi accadesse, che qualcuno di questi f, f', f'', ec. uguagliasse la frazione corrispondente, come se fosse per esempio $f'' = \frac{m-(a+fp+f'p')}{p''}$; allora i valori ulteriori, nell' esempio nostro f''', f^{IV}, ec. $f^{(c)}$ diverrebbero tutti zero.

Vogliasi per esempio nella (III) $n=5$, $a=3$, e vogliasi, che le Curve ad essa assintotiche corrispondentemente allo stesso diametro $y=L'x$ siano le tre Parabole $v'=Mx^{\frac{1}{3}}$, $v'=Mx^{\frac{1}{2}}$, $v'=Mx^{\frac{2}{3}}$. Avendosi in questo caso $p=1$, $k=3$, $p'=1$, $k_1=2$, $p''=2$, $k_2=3$; ed avendosi $\frac{n}{k}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$, $\frac{a}{k-p}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, sarà $f=1$. Inoltre poichè risulta $\frac{n-fk}{}=\frac{2}{2}=1$, ed $\frac{a'}{k_1-p'}=\frac{a-f(k-p)}{k_1-p'}=\frac{1}{1}=1$, dirò essere $f'=1$, ed $f''=0$. Che se fosse $n=6$; ottenendosi allora $\frac{n}{k}=\frac{6}{3}=2$, resterà $f=1$; per essere $\frac{n-fk}{k_1}=\frac{3}{2}$, ne verrà $f'=0$; ed avendosi infine $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2}=\frac{3}{3}=1$, ed $\frac{a''}{k_2-p''}=\frac{1}{1}=1$, si ricaverà $f''=1$.

78. Corrispondentemente al medesimo assintoto rettilineo, e diametro rispettivamente $y=L'x$ sia la Curva dell' Equazione (III), supposta come nei (n.^{i} 73, 74, 76.), fornita dei $2f+2f'+2f''+$ ec. $+2f^{(b)}$ rami iperbolici nel (n.° 74.); ed abbia inoltre $2f^{(b+1)}+2f^{(b+2)}+2f^{(b+3)}+$ ec. $+2f^{(b+c)}$ rami parabolici delle specie $v'=Mx^{\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}}$, $v'=Mx^{\frac{p^{(b+2)}}{k_{b+2}}}$, $v'=Mx^{\frac{p^{(b+3)}}{k_{b+3}}}$, ec. $v'=Mx^{\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}}$ ponendosi siccome nei citati (n.^{i} 74, 76.)

(XLVIII) gradatamente $-\frac{p}{k}<-\frac{p'}{k_1}<-\frac{p''}{k_2}<$ ec. $<-\frac{p^{(b)}}{k_b}, <\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}<\frac{p^{(b+2)}}{k_{b+2}}<\frac{p^{(b+3)}}{k_{b+3}}<$ ec. $<\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$. Domandasi il valore di

tutti i numeri f, f', f'', ec. $f^{(b)}, f^{(b+1)}, f^{(b+2)}$, ec. $f^{(b+c)}$ e quello di tutti i coefficienti M.

Determino da prima come nel (n.° 74.) i valori f, f', f'' ec. $f^{(b)}$; poscia trovate le due quantità $n-fk-f'k_1-f''k_2-$ ec. $-f^{(b)}k_b$, $a^{(b+1)}=a-f(k+p)-f'(k_1+p')-f''(k_2+p'')-$ ec. $-f^{(b)}(k_b+p^{(b)})$, divido quella per k_{b+1}, questa per $k_{b+1}-p^{(b+1)}$, paragono, e proseguendo il discorso, ed il calcolo pienamente come nel (n.° 76.) si otterranno gli altri valori $f^{(b+1)}$, $f^{(b+2)}, f^{(b+3)}$ ec. $f^{(b+c)}$. Così i valori de' coefficienti M si determineranno rapporto alle prime $f+f'+f''+$ ec. $+f^{(b)}$ Equazioni come nel (n.° 74.), e riguardo alle altre $f^{(b+1)}+f^{(b+2)}+f^{(b+3)}+$ ec. $+f^{(b+c)}$ come nel (n.° 76.).

79. 1.° I valori di β, che succedono immediatamente a quegli esponenti nelle Equazioni delle Iperbole (n.[i] 74. 78.) possono essere zero; e così possono essere zero quei valori di β, che precedono immediatamente gli esponenti delle Equazioni delle Parabole (n.[i] 76, 78.): perciò potrà essere nel (n.° 74.) $p^{(b)}=p^{(b-1)}=$ ec. $=0$, nel (n.° 76.) $p=p'=$ ec. $=0$, e nel (n.° 78.) $p^{(b)}=p^{(b-1)}=$ ec. $=0$, ovvero $p^{(b+1)}=p^{(b+2)}=$ ec. $=0$.

2.° Pel (n.° 71.) l' esponente massimo $\frac{p^{(c)}}{k_c}$ (n.° 76.), $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$ (n.° 78.) nelle Equazioni appartenenti alle Parabole assintotiche proviene sempre dall' uguaglianza nella Serie (XLI) del termine $m-n+n\beta$ con uno, o più dei termini, che lo precedono. Che se la Curva data sia priva di rami parabolici, e ne contenga degli iperbolici; allora rimarrà determinato nella maniera ora accennata l'esponente massimo $-\frac{p^{(b)}}{k_b}$ (n.° 74.) oppure lo zero (prec. 1.°).

3.° Dai (n.^{i} 73, 74, 76, 78, 19, 20.) apparisce aversi

$$e^{(f)}=fk_1,\ e^{(f+f')}=fk+f'k_1,\ e^{(f+f'+f'')}=fk+f'k_1+f''k_2,\ \text{ec.}$$

$$e^{(f+f'+\text{ec.}+f^{(b)})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b,\ e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})+f^{(b+1)})}$$

$$=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b+f^{(b+1)}k_{b+1}+\text{ec.}$$

$$e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b+c)})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b+c)}k_{b+c}=n\ (\text{prec. 2.°})$$

ed aversi

$$r^{(e)}=a,\ r^{(e^{f})}=fk+a',\ r^{(e^{f+f'})}=fk+f'k_1+a'',\ r^{(e^{f+f'+f''})}=fk+f'k_1+f''k_2+a''',\ \text{ec.},$$

$$r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec}+f^{(b)}})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b+a^{(b+1)},\ r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}+f^{(b+1)}})}$$

$$=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b+f^{(b+1)}k_{b+1}+a^{(b+2)},\ \text{ec.}$$

$$r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b+c)}})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b+c)}k_{b+c}=n.$$

Se mai mancassero i rami parabolici, e il massimo valore di β (n.° 69.) fosse $-\frac{p^{(b)}}{k_b}$ (n.° 74.); allora avremo

$$e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}=n=r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b;$$

e se mancando i rami iperbolici le Parabole della specie $v'=\text{M}x^{-\frac{p^{(c)}}{k_c}}$ (n.° 76.) fossero quelle del massimo esponente; in tal caso avrebbesi

$$e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)})}=n=r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)}})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(c)}k_c.$$

4.° Avendosi $e<e'<e''<e'''<\text{ec.}<e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}<$

$e^{(f+f'+f''+ \text{ec.} + f^{(b)}+1)} <$ ec. $< e^{(f+f'+f''+ \text{ec.} f^{(b+c)})}$ (n.^{i} 73, 74, 76, 78.) ,
dai (n^i 73, 74, 78.) apparisce dover essere rapporto alle Curve iperboliche $r^{(e)} > r^{(e')} > r^{(e'')} > r^{(e''')} >$ ec. $> r^{(e^{f+f'+f''+ \text{ec.} + f^{(b)}})}$,
e rapporto alle paraboliche $r^{(e^{f+f'+f''+ \text{ec.} + f^{(b)}})} <$
$r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}+1})} < r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}+2})} <$ ec. $< r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b+c)}})}$
(n.^{i} 76 , 78.). In tutti questi valori poi si osservi dover essere $r^{(e)} > e$, $r^{(e')} > e'$, $r^{(e'')} > e''$, ec. e l' ultimo soltanto $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b+c)}})} = e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b+c)})}$; e ciò perchè, mèntre si ha quest' ultimo necessariamente $= n$ (prec.^{i} 2.°, 3.°) deve poi essere $A^{(n)}$ non $= 0$, e ciascuno degli altri coefficienti $A^{(e)}$, $A^{(e')}$, $A^{(e'')}$, ec. $= 0$ (n.^{i} 27 , 69.).

5.° Poichè si ha $a' = a - f(k \pm p)$, $a'' = a' - f'(k_1 \pm p')$, $a''' = a'' - f''(k_2 \pm p'')$, $a^{iv} = a''' - f'''(k_3 \pm p''')$, ec. (n.^{i} 74, 76, 78.) prendendosi, laddove si trova il segno doppio, il segno superiore quando si tratta d' Iperbole, e l' inferiore, allorchè trattasi di Parabole, e poichè nelle Parabole, avendosi $\beta > 0$, e $\beta < 1$, risulta
$k > p$, $k_1 > p'$, $k_2 > p''$, $k_3 > p'''$, ec.; ne segue, che tanto relativamente alle Iperbole, quanto riguardo alle Parabole dovrà essere $a > a' > a'' > a''' >$ ec., e l'ultimo di questi valori sarà lo zero (1° 2°, 3°, n.° 75, n.° 76.).

6.° Acciocchè $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$ sia realmente il massimo degli esponenti supposti nel (n.° 78.), per quanto si è detto nei (prec.^{i} 1.°, n.° 74, 76, 78.) dovrà risultare

$$\frac{n - fk - f'k_1 - f''k_2 - \text{ec.} - f^{(b+c-1)}\ k_{b+c-1}}{k_{b+c}} = \frac{a^{(b+c)}}{k_{b+c} \pm p^{(b+c)}}, \quad \text{(XLIX)}$$

costituendosi da questi quoti il valore di $f^{(b+c)}$. Ho posto in $k_{b+c} \pm p^{(b+c)}$ il doppio segno, affin di comprendere tanto il caso, nel quale si vuole, che l' esponente ultimo appartenga, come nei (n.[i] 78, 76.) ad una Parabola, quanto il caso, nel quale tale esponente si volesse appartenere ad un' Iperbola, appartenendo allora a tante Iperbole anche tutti gli esponenti, che lo precedono (n.° 74. prec. 1.°). L' uguaglianza poi (XLIX), è chiaro, che seco porta le uguaglianze col numero n, che sonosi esposte nel (prec. 3.°), e viceversa. La condizione finalmente, che $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$ sia l' esponente massimo, produce una limitazione nei valori dei numeri f, f' f'', ec., come apparisce dal doversi verificare l' Equazione (XLIX), e dal dovere in essa i due membri esser numeri interi.

Posto a cagion d' esempio $a = 22$, $n = 23$, vogliasi, che corrispondentemente allo stesso assintoto, e diametro $y = L'x$, la Curva data abbia $2f + 2f'$ rami iperbolici delle specie $v' = Mx^{-\frac{2}{3}}$, $v' = Mx^{-\frac{1}{2}}$, e $2f''$ rami parabolici della specie $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$; e si domandano i valori de' numeri f, f', f'', ponendo, che $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$ sia la Curva assintotica del massimo esponente.

Poichè si ha $k = 3$, $-p = -2$; $k_1 = 2$, $-p' = -1$; $k_2 = 5$, $p'' = 2$; $n = 23$, $a = 22$; e però $\frac{n}{k} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$, $\frac{a}{k+p} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$, pel (2.° n.° 73.) potrà f uguagliare uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4. Risulta $\frac{n-fk}{k_1} = \frac{23-3f}{2}$, $\frac{a'}{k_1+p'} = \frac{a-f(k+p)}{k_1+p'} = \frac{22-5f}{3}$, ed è evidentemente per ciascuno dei valori di f $\frac{23-3f}{2} >$

$\frac{22-5f}{3}$; dunque potrà f' pel (3.° n.° 74.) ottenere uno dei valori interi, e positivi, che sono $< \frac{22-5f}{3}$. Finalmente avendosi $\frac{n-fk-f'k_1}{k_2} = \frac{23-3f-2f'}{5}$, $\frac{a''}{k-p''}$ (n.° 78.) $= \frac{a-f(k+p)-f'(k_1+p')}{k_2-p''}$

$= \frac{22-5f-3f'}{3}$, e dovendo per l' ipotesi essere $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$ la Curva assintotica dell' esponente massimo dovrà aversi $\frac{23-3f-2f'}{5}$ $= \frac{22-5f-3f'}{3}$ (prec. 6.°) $= f''$ (5.° n.° 74, n.° 76.). Ora da questa Equazione ritraesi $f' = \frac{41-16f}{9}$, e deve f' avere un valore intero e positivo; dunque dei cinque valori 0, 1, 2, 3, 4, non potrà f ottenere che il solo 2, perchè è per questo solo, che f' acquista un valore intero e positivo, cioè il valore 1. Fatto poi $f = 2$, $f' = 1$, siccome risulta $\frac{23-3f-2f'}{5} = \frac{15}{5} = 3$, $\frac{22-5f-3f'}{3} = \frac{9}{3} = 3$, dirò aversi $f'' = 3$; ed essere realmente $\frac{2}{5}$ l' esponente massimo, come si è supposto. Frattanto si osservi di quanto questa condizione, che sia $\frac{2}{5}$ l' esponente massimo limita i valori di f, e di f': i cinque valori 0, 1, 2, 3, 4 di f si sono per tal condizione ridotti al solo 2, e i diversi, che il limite $\frac{22-5f}{3}$ ci somministrava per f' sonosi ridotti al solo 1.

7.° Supponghiamo, che in questo esempio vogliasi per f prendere un altro dei suoi valori diverso dal 2, per esempio 1, ed un altro qualunque siasi, purchè opportuno per f'; e siccome in questa ipotesi non può più verificarsi l' Equazione $\frac{23-3f-2f}{5} = \frac{22-5f-3f'}{3}$, e perciò non può più essere $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$ la Curva assintotica del massimo esponente (prec.

6.°). Supponghiamo, che tal Curva del massimo esponente sia dopo della $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$, la $v' = Mx^{\frac{p'''}{k_3}}$, e vogliasi determinare l'esponente $\frac{p'''}{k_3}$, ed i numeri f', f'', f'''. Non avendosi $\frac{23-3f-2f'}{5} = \frac{22-5f-3f'}{3}$, dovrà la prima di queste quantità essere maggiore della seconda (n.^{i} 74, 78.), ed essere questa seconda non < 0. Sostituiti pertanto quelli tra i precedenti valori di f, e di f', che fanno verificare tali condizioni, potranno essere valori di f'' tutti gl' interi positivi, che sono $< \frac{22-5f-3f'}{3}$ (5.° n.° 74, 76, 78.). Finalmente volendosi $\frac{p'''}{k_3}$ l' esponente massimo, ed essendo

$$\frac{n-fk-f'k_1-f''k_2}{k_3} = \frac{23-3f-2f'-5f''}{k_3},\ \frac{a'''}{k_3-p'''} = \frac{a-f(k+p)-f'(k_1+p')-f''(k_2-p'')}{k_3-p'''}$$

$$= \frac{22-5f-3f'-3f''}{k_3-p'''}$$, ne verrà $\frac{23-3f-2f'-5f''}{k_3} = \frac{22-5f-3f'-3f''}{k_3-p'''}$, e per conseguenza $\frac{p'''}{k_3} = \frac{1+2f+f'-2f''}{23-3f-2f'-5f''}$, ed $f''' = \frac{23-3f-2f'-5f''}{k_3}$; onde dal conoscimento dei numeri f, f', f'' otterremo l' esponente richiesto $\frac{p'''}{k_3}$, ed il chiesto numero f'''.

Prendasi $f=1$; dovendo quindi essere $f' < \frac{22-5f}{3} = 5\frac{2}{3}$, potrebbe perciò f' avere uno dei valori 0, 1, 2, ec. 5; ma esser deve ancora $\frac{23-3f-2f'}{5} > \frac{22-5f-3f'}{3}$, ossia a cagione di $f=1$, $\frac{20-2f'}{5} > \frac{17-3f'}{3}$, da cui si ricava $f' > 2\frac{7}{9}$; inoltre l' ipotesi di $f'=5$, producendo $\frac{17-3f'}{3} = \frac{2}{3}$, fa sì che risulti $f''=0$. Dunque volendosi, che tra le nostre Curve assintotiche esista attualmente eziandio quella della Equazione $v'=Mx^{\frac{2}{5}}$, onde non sia $f''=0$, vedesi che f' non potrà ave-

re che uno dei due valori 3, 4. Ora corrispondentemente a questi si ha $\frac{17-3f'}{3} = \frac{17-9}{3} = 2\frac{2}{3}$, $\frac{17-3f'}{3} = \frac{17-12}{3} = 1\frac{2}{3}$. Dunque nella supposizione di $f' = 4$ avendosi $f'' = 1$, e nell' altra di $f' = 3$ avendosi $f'' = 1, 2$; (prescindesi dal valore di $f'' = 0$) dalla successiva sostituzione quando si pone $f = 1, f' = 4, f'' = 1$, otterremo $\frac{p'''}{k_3} = \frac{5}{7}$, quando si pone $f = 1, f' = 3, f'' = 1$, otterremo $\frac{p'''}{k_3} = \frac{4}{9}$, e quando si pone $f = 1, f' = 3, f'' = 2$, otterremo $\frac{p'''}{k_3} = \frac{1}{2}$, risultando poi nel primo e nel secondo caso $f''' = \frac{23-3f-2f'-5f''}{k_3} = 1$, e nel terzo $f''' = 2$. Pertanto, allorchè si attribuisce ad f il valore 1, non potrà alle supposte $v' = Mx^{-\frac{2}{3}}$, $v' = Mx^{-\frac{1}{2}}$, $v' = Mx^{\frac{2}{5}}$ succedere nel caso nostro immediatamente, come Curva assintotica del massimo esponente, che una delle tre Parabole $v' = Mx^{\frac{5}{7}}$, $v' = Mx^{\frac{4}{9}}$, $v' = Mx^{\frac{1}{2}}$, ed f, f', f'', f''' avranno in corrispondenza i valori ora esposti. Così troveremo, che quando si suppone $f = 3$, dopo le tre Curve supposte quella dell' esponente massimo è la Parabola $v' = Mx^{\frac{6}{7}}$, avendosi in corrispondenza $f = 3, f' = 1, f'' = 1, f''' = 1$. Non considero gli altri due valori 0, 4 di f; perchè l' ipotesi di $f = 0$ porterebbe la mancanza della Curva assintotica $v' = Mx^{-\frac{2}{3}}$, e l' altra di $f = 4$ producendo $f' = 0$, porterebbe la deficienza dell' altra Curva $v' = Mx^{-\frac{1}{2}}$.

Quanto si è detto nell' esempio presente, si dice, ed

egualmente si pratica in qualunque altro caso somigliante. Supposto, che date in generale le Curve assintotiche aventi gli esponenti (XLVIII) (n.° 78.) si trovi, che come nell'esempio precedente sotto certi valori dei numeri f, f', f'', ec. non si verifichi l'Equazione (XLIX): non essendo più in questo caso la Curva dell' Equazione $v' = Mx^{\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}}$ l' assintotica dell' esponente massimo; supponghiamo, che tale sia una susseguente, che porrò espressa dall'Equazione $v' = Mx^{\frac{p^{(b+c+1)}}{k_{b+c+1}}}$, dove l' esponente $\frac{p^{(b+c+1)}}{k_{b+c+1}}$ sia $> \frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$, e sia da determinarsi opportunamente. Per simile determinazione, e la rispettiva dei numeri f, f', f'', ec. $f^{(b+c+1)}$, eseguisco prima i soliti paragoni e calcoli; giunto quindi ad ottenere i due risultati (XLIX), osservo dover in questo caso essere il primo di essi maggiore del secondo, e dover essere

$$\frac{n - fk - f'k_1 - \text{ec.} - f^{(b)}k_b - f^{(b+1)}k_{b+1} - f^{(b+2)}k_{b+2} - \text{ec.} - f^{(b+c)}k_{b+c}}{k_{b+c+1}} =$$

$$\frac{+p^{(b)}) - f^{(b+1)}(k_{b+1} - p^{(b+1)}) - f^{(b+2)}(k_{b+2} - p^{(b+2)}) - \text{ec.} - f^{(b+c)}(k_{b+c} - p^{(b+2)}}{k_{b+c+1} - p^{(b+c+1)}}$$

Ora da quest' ultima Equazione ritraggo l' altra

$$= \frac{n - a + fp + f'p' + \text{ec.} + f^{(b)}p^{(b)} - f^{(b+1)}p^{(b+1)} - f^{(b+2)}p^{(b+2)} - \text{ec.} - f^{(b+c)}p^{(b+c)}}{n - fk - f'k_1 - \text{ec.} - f^{(b)}k_b - f^{(b+1)}k_{b+1} - f^{(b+2)}k_{b+2} - \text{ec.} - f^{(b+c)}k_{b+c}}$$

ed in essa il secondo membro è pienamente noto, perche i numeri f, f', ec. f^{b+c} suppongonsi già tutti determinati, e le

quantità n, a, p, k, p', k_1, ec. $p^{(b+c)}$, k_{b+c} suppongonsi tutte date (n.° 78.). Dunque verrà così facilmente determinato il valor in quistione dell' esponente $\frac{p^{(b+c+1)}}{k_{b+c+1}}$, costituendosi da questo nella (L) il primo membro.

8.° Osservando il numeratore ed il denominatore del secondo membro della Equazione (L), ed osservando insieme i numeratori, e i denominatori delle frazioni (XLVIII), è facile riconoscere l' andamento dell' indicato secondo membro; onde in qualunque caso potremo tostamente, e con molta facilità ottenere il valore dell' esponente massimo $\frac{p^{(b+c+1)}}{k_{b+c+1}}$.

Avendosi poi $f^{(b+c+1)} = \frac{n - fk - f'k_1 - \text{ec.} - f^{(b+c)} k_{b+c}}{k_{b+c+1}}$ (n.^{i} 73, 74, 76, 78,); dalla (L) apparisce, che dovrà essere divisibile esattamente per $f^{(b+c+1)}$ non solamente il denominatore, ma ancora il numeratore del secondo membro della (L); e da ciò si ricava, che nell' ottenere il valore di $\frac{p^{(b+c+1)}}{k_{b+c+1}}$, ottienesi ancora il valore di $f^{(b+c+1)}$. Imperocchè avuti i due numeri $n - a + fp + f'p' +$ ec., $a - fk - f'k_1 -$ ec., o trovansi questi primi tra loro, o si trovano composti; nel primo di questi casi sarà $f^{(b+c+1)} = 1$, nel secondo $f^{(b+c+1)}$ uguaglierà il loro massimo comun divisore. Nell' esempio del (prec. 7.°) poichè, mentre si fa $f = 1$, $f' = 4$, $f'' = 1$, risulta $1 + 2f + f' - 2f'' = 5$, $23 - 3f - 2f' - 5f'' = 7$, e 5, 7 sono primi fra loro, ne viene $f''' = 1$; e quando ponesi $f = 1$, $f' = 3$, $f'' = 2$, poichè diventa $1 + 2f + f' - 2f'' = 2$, $23 - 3f - 2f' - 5f'' = 4$, e 2, 4 sono fra

loro composti col massimo divisor comune 2, ne segue essere $f''' = 2$.

80. 1.° Supponghiamo, che a norma del (1.° n.° 79.) esistano valori di β uguali allo zero, e sia per esempio nel (n.° 78) $p^{(b+1)} = p^{(b+2)} = p^{(b+3)} =$ ec. $= 0$; avremo in questo caso il numero h supposto nel (n.° 29.) uguale ad $f^{(b+1)} k_{b+1} + f^{(b+2)} k_{b+2} + f^{(b+3)} k_{b+3} +$ ec., e tale sarà il grado dell' Equazione in M nel citato (n.° 29.) ritrovata.

2.° La determinazione dei valori di f, che corrispondono al caso di $\beta = 0$, è più semplice della necessaria ad eseguirsi in corrispondenza agli altri valori di β. Difatti volendosi il precedente valore $f^{(b+1)}$, dovrei in generale paragonare fra loro i due fratti $\frac{n - fk - f'k_1 - f''k_2 - \text{ec.} - f^{(b)} k_b}{k_{b+1}}$, $\frac{a^{(b+1)}}{k_{b+1} - p^{(b+1)}}$ (n.° 78.) ma essendo $p^{(b+1)} = 0$, vedesi, che basterà paragonare fra loro i numeratori delle esposte due frazioni, e dirò $f^{(b+1)} = a^{(b+1)}$, se si trovano essi uguali; e se trovansi disuguali, dovendo quì ancora essere il primo maggior del secondo, dirò potere $f^{(b+1)}$ uguagliare tutti gl'interi positivi $< a^{(b+1)}$. Siccome, posto lo zero invece di $p^{(b+1)}$, e divisi i denominatori per $k_{(b+1)}$, si ottiene $n - fk - f'k_1 - f''k_2 - \text{ec.} - f^{(b)} k_b = \frac{a^{(b+1)}}{1 \pm \frac{0}{k_{b+1}}} = \frac{a^{(b+1)}}{1 - 6}$, ne segue, che le stesse proprietà, le quali si sono dimostrate nei (n.^{i} 73, 74, 76, 78.), hanno luogo quì ancora; avvertendo però, che avendosi (prec. 1.°) $\frac{0}{k_{b+1}}$

$= \frac{o}{k_{b+2}} = \frac{o}{k_{b+3}} =$ ec., i valori di M vengono necessariamente compresi in una sola Equazione, cioè nella esposta nei (n.° 29, prec. 1.°). Nè deve ciò sorprendere, perchè in corrispondenza al valore $\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}} = \frac{o}{k_{b+1}}$ risultando nel (n.° 18.) $\mu'^{p(b+1)} = \mu''^{p^{(b+1)}} =$ ec. $= 1$, non può più asserirsi, che il termine $\mu^{p^{(b+1)}} Mx^{\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}}$ abbia k_{b+1} valori diversi fra loro, e che i rispettivi valori di M dipendano da un' Equazione della forma $M^{k_{b+1}} = H$. In questo caso quantunque si abbiano diversi denominatori k_{b+1}, k_{b+2}, k_{b+3}, ec. pure per M non potremo avere, che un' Equazione sola, quella cioè, che è stata determinata nel (n.° 29.) del grado h.

3.° Dal (n.° 29.) sappiamo, che l'essere $\beta = o$ fa sì, che la Equazione (XXIII) acquista la forma (XXV), ove però si osserva, che nei primi termini delle prime h linee il numero minimo, che si sottrae da m, è h, quando si ha $h = n$; ma quando è $h < n$, questo numero minimo esser deve $h + 1$ (2.°, 3.° n.° 29.). In conseguenza di ciò denomineremo tal numero minimo $h + \mu$, rappresentandosi da μ lo zero, oppur l'unità secondo che si ha h uguale, ovvero minore di n.

4.° Denominati M', M'', M''', ec. i valori di M nella Equazione $v' = Mx^o = M$, ossia $y_1 = M$, riteniamo, che, come nel (n.° 65.) il valore M' sia ripetuto l' volte, M'' le volte l'', M''' le volte l''', ec.; e fatto $y_1 = M' + y_2$, si trasformi la (XXV) nella (XXVI); e quindi si ponga $x = \infty$: poichè deve perciò essa (XXVI) divenire un' Equazione, nella quale non possono sussistere, che i primi termini a sinistra delle sue linee diverse, e poichè pel (5.° n.° 29.) deve risultare $G_1 = o$, $G'_1 = o$, $G''_1 = o$, ec. $G^{(l'-1)} = o$, $G_1^{l'}$ non $= o$,

porremo, che divenga della forma

$$\text{(LI)}\quad \begin{aligned} &I_1 x^{m-(h+\mu+\alpha)} + I'_1 x^{m-(h+\mu+\alpha')} y_2 + I''_1 x^{m-(h+\mu+\alpha'')} y_2^2 + \text{ec.} + \\ &I_1^{(e)} x^{m-(h+\mu+\alpha^{(e)})} y_2^{e} + \text{ec.} + I_1^{(e')} x^{m-(h+\mu+\alpha^{(e')})} y_2^{e'} + \text{ec.} + \\ &G_1^{(l')} x^{m-(h+\mu)} y_2^{l'} + \text{ec.} + I_1^{e''} x^{m-(h+\mu+\alpha^{(e'')})} y_2^{e''} + \text{ec.} + \alpha^{(m)} y_2^{m} = 0, \end{aligned}$$

ove si abbia $e < e' < l' < e'' <$ ec. Dovrà essere ciascuno dei numeri $\alpha, \alpha', \alpha''$, ec. $\alpha^{(l'-1)} > 0$, e ciascuno degli altri $\alpha^{(l+1)}$, ec. $\alpha^{(e'')}$, ec. non < 0. Per la stessa supposizione di $x = \infty$, riducendosi la $y_2 = Nx^{\gamma} +$ ec. (5.° n.° 29.) alla $y_2 = Nx^{\gamma}$, sostituisco questo valore nella (LI), ed essa ci somministrerà la serie di esponenti

$$\text{(LII)}\quad \begin{aligned} &m-(h+\mu+\alpha),\ m-(h+\mu+\alpha')+\gamma,\ m-(h+\mu+\alpha'')+2\gamma,\ \text{ec.} \\ &m-(h+\mu+\alpha^{(e)})+e\gamma,\ \text{ec.}\ m-(h+\mu+\alpha^{(e')})+e'\gamma,\ \text{ec.}\ m-(h+\mu)+ \\ &l'\gamma,\ \text{ec.}\ m-(h+\mu+\alpha^{(e'')})+e''\gamma,\ \text{ec.}\ \alpha^{(m)}\gamma. \end{aligned}$$

5.° Dal paragone fra loro degli esponenti (LII) instituito giusta il solito metodo della nota al (n.° 69.) si ricaveranno tutti i valori di γ nella $y_2 = Nx^{\gamma}$, ossia nella $u'_1 = Nx^{\gamma}$ (5.° n.° 29, n.[i] 2, 47.); come nel (69) si determinarono i valori di β nella $v' = Mx^{6}$. Qui ancora i valori di γ rimarranno determinati secondo l' ordine della loro grandezza (1.° n.° 70.); e per essere $\gamma < \beta$, e $\beta = 0$ saranno tutti negativi.

81. Tra i valori di γ uno sempre ne esiste proveniente dall' uguaglianza del termine $m-(h+\mu)+l'\gamma$ con uno o più dei precedenti della Serie (LII); e questo valore sarà il massimo.

La somiglianza di questo Teorema con quello del (n.° 71.)

fa sì, che simile ancora ne è la dimostrazione. Presi difatti i termini $m-(h+\mu+\alpha^{(e)})+e\gamma$, $m-(h+\mu)+l'\gamma$, $m-(h+\mu+\alpha^{(e'')})+e''\gamma$, e dal paragone del primo con gli altri due ottenuti per γ i due valori $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}$, $-\frac{\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}}{e''-e}$, osservo, che il primo di essi è sempre minore del secondo: ed in realtà o si vuole $\alpha^{(e'')}<\alpha^{(e)}$, o non si vuol tale; se si ha $\alpha^{(e'')}<\alpha^{(e)}$ ne verrà $\alpha^{(e)}>\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}$, ed essendo $l'-e<e''-e$, ed $l'-e>0$, $\alpha^{(e)}>0$, sarà ancora $\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}>\frac{\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}}{e''-e}$, e però $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}<-\frac{\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}}{e''-e}$: che se si vuole $\alpha^{(e'')}$ non $<\alpha^{(e)}$; allora risultando $-\frac{\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}}{e''-e}=\frac{\alpha^{(e'')}-\alpha^{(e)}}{e''-e}$ non <0, ed essendo $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}<0$, sarà nuovamente $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}<-\frac{\alpha^{(e)}-\alpha^{(e'')}}{e''-e}$. Ma $m-(h+\mu+\alpha^{(e'')})+e''\gamma$ esprime uno qualunque tra i termini (LII), che succedono ad $m-(h+\mu)+l'\gamma$, ed $m-(h+\mu+\alpha^{(e)})+e\gamma$ può sempre tra i termini, che precedono lo stesso $m-(h+\mu)+l'\gamma$ esprimerne per la stessa ragione, che si è addotta nel (n.° 71.) uno, da cui a norma del metodo della nota al (n.° 69.) partendo, e proseguendo il paragone con i termini successivi si trovi il valore $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}$ minore di tutti i valori precedenti esprimibili in generale per $\frac{\alpha^{(e')}-\alpha^{(e)}}{e'-e}$. Dunque essendo questo $-\frac{\alpha^{(e)}}{l'-e}$ pel solito metodo uno dei valori di γ, rimarrà così pruovata la prima parte del nostro Teorema. Per la parte seconda poi osservo, che dal paragone del termine

$m - (h + \mu) + l'\gamma$ con l' altro $m - (h + \mu + \overset{(e'')}{a}) + e''\gamma$ ci risulta $\gamma = \frac{a^{(e'')}}{e'' - l'}$, e quindi essendo $e'' > l'$, ed $\overset{(e'')}{a}$ non < 0, si ottiene per γ un valore non < 0. Dunque, dovendo i valori di γ, che noi ricerchiamo, essere tutti negativi (5° n.° prec.), non potranno essere tali quelli, che provengono dal paragone del termine $m - (h + \mu) + l'\gamma$ con tutti i successivi. Ma il metodo da noi usato ci esibisce sì gli uni, che gli altri: dunque trascurati questi ultimi perchè non servono alla soluzione del nostro Problema, ne segue, che $-\frac{a^{(e)}}{l' - e}$ sarà l'ultimo dei valori, che soddisfanno al Problema medesimo, e però ne sarà il massimo (5.° n.° prec.). Dunque ec.

82. La Curva dell' Equazione (III) (n.° 1.) supposta riguardo al grado ed ai coefficienti come nel (n.° 73. 5°), sia corrispondentemente allo stesso assintoto $y = L'x + M'$ fornita di $2g + 2g' + 2g'' + \text{ec.} + 2\overset{(b)}{g}$ rami iperbolici, dei quali i primi $2g$ siano della specie $u'_1 = Nx^{\frac{-q}{k'}}$, i secondi $2g'$ della specie $u'_1 = Nx^{\frac{-q'}{k'_1}}$, i terzi $2g''$ della specie $u'_1 = Nx^{\frac{-q''}{k'_2}}$, e così di seguito, ponendosi gradatamente siccome nei (n.[i] 74, 78.).

$$\text{(LIII)} \qquad -\frac{q}{k'} < -\frac{q'}{k'_1} < -\frac{q''}{k'_2} < \text{ec.} < -\frac{q^{(c)}}{k'_c}.$$

Essendo dati questi esponenti, si domandano i numeri g, g', g'', ec. $\overset{(c)}{g}$, ed i valori de' coefficienti N.

Il Problema presente essendo simile a quelli de' (n.[i] 73, 74.) esige una simile soluzione; ma la forma dell' Equazione (XXVI), da cui essa dipende, producendo alcune varia-

zioni notabili, sarà necessario esporla attualmente. Trasformata perciò, col porre successivamente $y = L'x + y_1$, $y_1 = M + y_2$ la (III) nella (XXVI) (n.° 29.); ottenuta quindi col fare $x = \infty$, la (LI), (4.° n.° 80.), ed avuta infine col sostituire Nx^γ in vece di y_2 la Serie di esponenti (LII), si applichi a questi il metodo della nota al (n.° 69.), e si trovino così per γ i successivi valori (LIII). Ciò eseguendo supponghiamo, che il primo valore $-\frac{q}{k'}$ ottengasi in generale dall' uguaglianza fra loro dei termini

$$m-(h+\mu+a),\ m-(h+\mu+a^{(e')})+e'\gamma,\ m-(h+\mu+a^{(e'')})+e''\gamma,\ m-(h+\mu+a^{(e''')})+e'''\gamma,\ \text{ec.}\ m-(h+\mu+a^{(e^g)})+e^{(g)}\gamma, \quad \text{(LIV)}$$

ove sia $e' < e'' < e''' < \text{ec.} < e^{(g)}$, avremo da ciò

$$\gamma = -\frac{a-a^{(e')}}{e} = -\frac{a-a^{(e'')}}{e'} = -\frac{a-a^{(e''')}}{e''} = \text{ec.} = -\frac{a-a^{(e^g)}}{e^{(g)}} = -\frac{q}{k'};$$

la (LI) per cagione di $x = \infty$ si cangerà nella

$$I_1 x^{m-(h+\mu+a)} + I_1 x^{(e')} {}^{m-(h+\mu+a^{(e')})} y_2^{e'} + I_1 x^{(e'')} {}^{m-(h+\mu+a^{(e'')})} y_2^{e''} +$$
$$I_1 x^{(e'')} {}^{m-(h+\mu+a^{(e''')})} y_2^{e'''} + \text{ec.} + I_1^{(e^g)} x^{m-(h+\mu+a^{(e^g)})} y_2^{e^{(g)}} = 0;$$

collocato in essa Nx^γ in vece di y_2, otterremo per N l' Equazione $I_1 + I_1^{(e')} N^{e'} + I_1^{(e'')} N^{e''} + I_1^{(e''')} N^{e'''} + \text{ec.} + I_1^{(e^g)} N^{e^{(g)}} = 0$; e da tutto questo, come nel (n.° 73.) si troverà dover essere

$$e' = k',\ e'' = 2k',\ e''' = 3k',\ \text{ec.}\ e^{(g)} = gk';$$
$$a - a^{(e')} = q,\ a - a^{(e'')} = 2q,\ a - a^{(e''')} = 3q, \text{ec.}\ a - a^{(e^g)} = gq.$$

1.° Ciò posto, volendosi in primo luogo il valore di g,

paragono fra loro i due quoti $\frac{l'}{k'}$, $\frac{a}{q}$, e se li trovo eguali, io dico dover essere $g=\frac{l'}{k'_1}=\frac{a}{q}$. Difatti questa uguaglianza produce $l'=\frac{\frac{a}{q}}{k'_1}=\frac{a}{-\gamma}$, $-l'\gamma=a$, $m-(h+\mu)+l'\gamma=m-(h+\mu+a)$; ma $m-(h+\mu+a)$ è il primo dei termini (LIV); dunque nella Serie stessa esister deve ancora $m-(h+\mu)+l'\gamma$, poichè nella (LI) si ha il coefficiente $G_1^{(l)}$ non $=0$ (5.° n.° 29.); ed esso $m-(h+\mu)+l'\gamma$ sarà inoltre identico con l'ultimo dei (LIV); imperciocchè se ciò non si volesse, dovrebbe essere $e^{(g)}>l'$, e però $gk'>l'$, il che non può essere. Avendosi perciò $e^{(g)}=l'$, $a^{(e^g)}=0$, ne verrà $gk'=l'$, $a-gq=0$, e quindi $g=\frac{l'}{k'}=\frac{a}{q}$.

Che se si trovano i quoti $\frac{l'}{k'}$, $\frac{a}{q}$ disuguali fra loro, rifletto quì ancora dover essere $\frac{l'}{k'}>\frac{a}{q}$; perchè se si avesse al contrario $\frac{l'}{k'}<\frac{a}{q}$, ne verrebbe $-\frac{q}{k'}>-\frac{a}{l'}$; ma questo $-\frac{a}{l'}$ provenendo dall' uguaglianza $m-(h+\mu+a)=m-(h+\mu)+l'\gamma$ costituirebbe un valore di γ (n.° prec.). Dunque il minimo degli esponenti (LIII) non sarebbe più $-\frac{q}{k'}$, ma bensì $-\frac{a}{l'}$, il che è contro la supposizione. La disuguaglianza poi tra $\frac{l'}{k'}$, ed $\frac{a}{q}$ producendo l'altra fra $m-(h+\mu)+l'\gamma$,

ed $m-(h+\mu+\alpha^{(e^g)})+e^{(g)}\gamma$; fà sì, che risulta $\alpha^{(e^g)}>0$ (4.° n.° 80.). Dunque avendosi ancora $\alpha-gq>0$, e però $g<\frac{\alpha}{q}$, potranno in questo secondo caso essere valori di g tutti gl' interi positivi, che sono $<\frac{\alpha}{q}$.

I valori dei coefficienti N, che corrispondono all' esponente $-\frac{q}{k'}$, verranno somministrati evidentemente dalla precedente Equazione in N, ossia dalla

$$I_1+I_1^{(k')}N^{k'}+I_1^{(2k')}N^{2k'}+\text{ec.}+I_1^{(gk')}N^{gk'}=0,$$

nella quale I_1, $I_1^{(k')}$, $I_1^{(2k')}$, ec. $I_1^{(gk')}$ non sono che i coefficienti nella Equazione (XXVI) dei termini $x^{m-(h+\mu+\alpha)}$
$x^{m-(h+\mu+\alpha-q)}y_2^{k'}$, $x^{m-(h+\mu+\alpha-2q)}y_2^{2k}$, ec. $x^{m-(h+\mu+\alpha'-gq)}y_2^{gk'}$.

2.° Per la determinazione in secondo luogo del numero g, paragono fra loro le due quantità $\frac{l'-gk'}{k'_1}$, $\frac{\alpha-gq}{q'}$, e se trovo essere queste uguali, dirò aversi $g'=\frac{l'-gk'}{k'_1}=\frac{\alpha-gq}{q'}$; che se risultano disuguali, dovrà allora aversi $\frac{l'-gk'}{k'_1}>\frac{\alpha-gq}{q'}$, ed i valori di g' potranno essere tutti gl' interi positivi $<\frac{\alpha-gq}{q'}$. I valori poi di N nella corrispondente Equazione $u'_1=Nx^{-\frac{q'}{k'_1}}$ dipenderanno dall' Equazione

$$I_1^{(gk')}+I_1^{(gk'+k'_1)}N^{k'_1}+I_1^{(gk'+2k'_1)}N^{2k'_1}+\text{ec.}+I_1^{(gk'+g'k'_1)}N^{g'k'_1}=0$$

dove $I_1^{(gk')}$, $I_1^{(gk'+k'_1)}$, $I_1^{(gk'+2k'_1)}$, ec. $I_1^{(gk'+g'k'_1)}$ sono i coefficienti

nella (XXVI) dei termini $x^{m-(h+\mu+\alpha-gq)}y_2^{gk'}$, $x^{m-(h+\mu+\alpha-gq-q')}y_2^{gk'+k'_1}$

$x^{m-(h+\mu+\alpha-gq-2q')}y_2^{gk'+2k'_1}$, ec. $x^{m-(h+\mu+\alpha-gq'-g'q')}y_2^{gk'+g'k'_1}$.

Il valore del numero g'' si otterrà dal paragone fra loro delle quantità $\frac{l'-gk'-g'k'_1}{k'_2}$, $\frac{\alpha-gq-g'q'}{q''}$, avvertendo che g'' sarà uguale a ciascuna di esse, quando sono esse tra loro uguali; e che potrà g'' uguagliare ciascuno dei numeri interi e positivi, che sono $< \frac{\alpha-gq-g'q'}{q''}$, allorchè sia questa quantità minore dell' altra $\frac{l'-gk'-g'k'_1}{k'_2}$, giacchè non ne può mai essere maggiore. L' Equazione poi

$$\mathrm{I}_1^{(gk'+g'k'_1)}+\mathrm{I}_1^{(gk'+g'k'_1+k'_2)}\mathrm{N}^{k'_2}+\mathrm{I}_1^{(gk'+g'k'_1+2k'_2)}\mathrm{N}^{2k'_2}+\text{ec.}+\mathrm{I}_1^{(gk'+g'k'_1+g''k'_2)}\mathrm{N}^{g''k'_2}=0,$$

i coefficienti della quale non sono nella (XXVI) che i coefficienti dei termini $x^{m-(h+\mu+\alpha-gq-g'q')}y_2^{gk'+g'k'_1}$,

$x^{m-(h+\mu+\alpha-gq-g'q'-q'')}y_2^{gk'+g'k'_1+k'_2}$, $x^{m-(h+\mu+\alpha'-gq-g'q'-2q'')}\times$

$y_2^{gk'+g'k'_1+2k'_2}$, ec. $x^{m-(h+\mu+\alpha-gq-g'q'-g''q'')}y_2^{gk'+g'k'_1+g''k'_2}$

somministrerà i valori di N nella Equazione $u'_1=\mathrm{N}x^{-\frac{q''}{k'_2}}$

Così in progresso; e la dimostrazione di queste operazioni deducesi agevolmente da quanto si è detto nel (n.°74.), e nel (preced. 1.°).

83. 1.° Allorchè risulta $g=\frac{l'}{k'}=\frac{\alpha}{q}$, ovvero $g'=\frac{l'-gk'}{k'_1}$

$= \frac{\alpha - gq}{q}$, ovvero $g'' = \frac{l' - gk' - g'k_1'}{k'_2} = \frac{\alpha - gq - g'q'}{q''}$, ovvero ec., dovranno necessariamente i diversi numeratori essere divisibili esattamente pei rispettivi denominatori; e ciò perchè, come si è osservato nei (1.° n.° 73, 2.° n.° 74.), i numeri k', q; k'_1, q'; k'_2, q''; ec. deggiono essere infine rispettivamente primi tra loro, e in conseguenza di questo non possono le esposte eguaglianze verificarsi, quando non succeda l' indicata esatta divisibilità.

2.° Quì ancora, come nel (1.° n.° 75.), quando ha luogo una delle sovraesposte uguaglianze (prec. 1.°), e quindi la rispettiva unica determinazione del numero g; i valori dei g successivi sono tutti zero.

3.° Ancora nel Problema del (n.° prec.) si possono eseguire riflessioni, e dedur conseguenze simili a quelle dei (2.°, 3.°, 4.°, 5.° n.° 75.). Perciò se si vegga per esempio essere $\frac{l'}{k'} < \frac{\alpha}{q}$ (1.° n.° prec.); diremo non essere già l'Iperbola della Equazione $u'_1 = Nx^{-\frac{q}{k'}}$ quella di esponente minimo, ma tale essere l' Iperbola della $u'_1 = Nx^{-\frac{\alpha}{l'}}$; e volendosi il valore di g che riguarda quest' ultima, troveremo essere $g = \frac{l'}{l'} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

4.° Nel modo medesimo, con cui nel (n.° prec.) sonosi determinati i numeri g, g', g'', ec. delle Iperbole assintotiche, delle specie $u'_1 = Nx^{-\frac{q}{k'}}$, $u'_1 = Nx^{-\frac{q'}{k'_1}}$, $u'_1 = Nx^{-\frac{q''}{k'_2}}$ ec. potremo determinare i numeri delle Iperbole assintotiche delle specie $u'_2 = Nx^{-\frac{q}{k''}}$, $u'_2 = Nx^{-\frac{q'}{k''_1}}$, $u'_2 = Nx^{-\frac{q''}{k''_2}}$ ec. corrispondenti all' assintoto rettilineo $y = L'x + M''$; così si troveranno i numeri delle diverse Iperbole assintotiche che

corrispondono all' assintoto $y = L'x + M'''$; e così in progresso, determinandosi sempre in simil maniera i valori dei rispettivi coefficienti N.

5.° Dai (n.^{i} 65, 80, 81, 82.) apparisce dover essere

$$gk' + g'k'_1 + g''k'_2 + \text{ec.} + g^{(c)}k'_c = l',$$

$$gk'' + g'k''_1 + g''k''_2 + \text{ec.} + g^{(c')}k''_{c'} = l''$$

$$gk''' + g'k'''_1 + g''k'''_2 + \text{ec.} + g^{(c'')}k'''_{c''} = l''',$$

ec.

distinguendo fra loro le frazioni $\frac{q}{k}$, che corrispondono ai diversi coefficienti M', M'', M''', ec., col sovrapporre alla k tanti apici, quanti sono gli esistenti sopra i rispettivi valori di M.

6.° Le soluzioni de' Problemi dei (n.^{i} 73, 74, 76, 78, 82,) servono a rendere più completa ed esatta la soluzione del Problema del (n.° 58.).

CAPO III.°

Della forma, che aver deve un' Equazione Algebraica, acciocchè la Curva, che ne viene rappresentata sia fornita di rami iperbolici e parabolici di determinate specie, ed in un numero per ciascuna specie determinato.

84. 1.° Dai (n.[i] 74, 76.) sappiamo essere

$$a^{(b+1)} = a - f(k \pm p) - f'(k_1 \pm p') - f''(k_2 \pm p'') - \text{ec.} - f^{(b)}(k_b \pm p^{(b)}),$$

prendendosi i segni superiori, quando si tratti di Iperbole assintotiche, gl' inferiori, quando trattisi di Parabole; ma abbiamo ancora $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})} = e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} + a^{(b+1)}$; dunque eliminando $a^{(b+1)}$, otterremo $a = r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})} - e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} +$ $f(k \pm p) + f'(k_1 \pm p') + f''(k_2 \pm p'') + \text{ec.} + f^{(b)}(k_b \pm p^{(b)})$.

Il minimo valore, che può acquistare $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})}$ sappiamo essere $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}f^{(b)})}$: pertanto attribuendo a quel numero quest' ultimo valore quel, che ne viene per a, cioè $a = f(k \pm p) + f'(k_1 \pm p') + f''(k_2 \pm p'') + \text{ec.} + f^{(b)}(k_b \pm p^{(b)})$ sarà il minimo, che sotto dati valori dei numeri f, f', f'', ec., k, k_1, k_2, ec. p, p', p'', ec. possa ricevere.

Siccome poi deve essere $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} = fk + f'k_1 + f''k_2 + \text{ec.}$

$+f^{(b)}k_b$ (n.° 74.), e questa somma non può risultare $> n$ (n.[i] 19, 20.); quindi ne segue, che la supposizione di $a^{(b+1)} = 0$ producendo $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})} = e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}$, fa sì, che debba essere $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} = n$ (n.° 69.), e però, che quest' ultima conseguenza procede dall' ipotesi di essere a di valor minimo.

2.° Potrebbero giusta il (1.° n.° 79.) dei valori di β risultare zero, e corrispondentemente a questi ritenute le denominazioni, supposizioni, e considerazioni dei (n.[i] 80, 81, 82) avendosi $a = \alpha^{(e^{g+g'+g''+\text{ec.}+g^{(c)}})} + gq + g'q' + g''q'' + \text{ec.} + g^{(c)}q^{(c)}$, il valor minimo di a si otterrà, ponendo $\alpha^{(e^{g+g'+g''+\text{ec.}+g^{(c)}})} = 0$, e sarà esso perciò $a = gq + g'q' + g''q'' + \text{ec.} + g^{(c)}q^{(c)}$. Questa ipotesi poi di $\alpha^{(e^{g+g'+g''+\text{ec.}+g^{(c)}})} = 0$ ha luogo sempre in corrispondenza dell'Iperbola assintotica $u'_1 = \mathrm{N}x^{-\frac{q^{(c)}}{k'_c}}$ del massimo esponente, e l'accennato valore è sempre zero in corrispondenza al termine nella (LI), che moltiplica $y^{l'}_2$ (n.[i] 82, 81, 3.° n.° 80.).

85. Tra le Equazioni delle Curve, le quali sono dotate di $2f + 2f' + 2f'' + \text{ec.} + 2f^{(b)}$ rami approssimantisi rispettivamente ai rami delle Iperbole supposte nel (n.° 74.), vogliasi determinare l' esponente di quelle, che sono del grado minimo.

Pel (3.° n.° 79.) nel caso nostro esser deve $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})} =$ $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} = n$: dunque avremo in corrispondenza

$$a = f(k+p) + f'(k+p') + f''(k_1+p'') + \text{ec.} + f^{(b)}(k_b+p^{(b)}) \; (1.° \text{ n.° prec.}). \quad (LV)$$

Ora qualunque siasi l' Equazione (III) (n.° 1.) rappresentante una Curva algebraica, e qualunque per conseguenza la sua trasformata (XXIII), il minimo valore che può ottenere l' esponente m è evidentemente il numero a, e d' altronde essendo $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}$ non $> m \; r^{(e)} = a$ (n.^{i} 73, 74.), ed $r^{(e)} > r^{(e')} > r^{(e'')} > \text{ec.} > r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})}$ (4.° n.° 79.), può benissimo supporsi nel tempo medesimo $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}})} = e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}$, ed $m = a$. Dunque essendo il precedente valore (LV) il minimo valore, che può ricevere a (1.° n.° 84.) col dare ad m questo valore, otterremo il minimo valore richiesto.

Tra le Curve, le quali corrispondentemente allo stesso assintoto rettilineo $y = L'x$ sono fornite di sei rami approssimantisi ai rami delle tre Iperbole $v'^2 = M'x^{-3}$, $v'^2 = M''x^{-3}$, $v'^2 = M'''x^{-3}$, di altri quattro rami approssimantisi ai rami delle $v'^2 = M^{\prime v}x^{-1}$, $v'^2 = M^{v}x^{-1}$, e di due rami avvicinantisi ai rami della $v'^3 = M^{v'}x^{-1}$, dimandasi l' esponente di quelle del grado più piccolo. Poichè in questo caso si ha $\frac{p}{k} = \frac{3}{2}$, $f = 3$, $\frac{p'}{k_1} = \frac{1}{2}$, $f' = 2$, $\frac{p'}{k_2} = \frac{p^{(b)}}{k_b} = \frac{1}{3}$, $f'' = 1$, risponderò, che l'esponente richiesto sarà $3(2+3) + 2(2+1) + 1(3+1) = 25$.

86. Cercasi la soluzione del Problema proposto nel (n.° prec.), mentre si voglia, che le Curve siano fornite di

$2f+2f'+2f''+$ec.$+2f^{(c)}$ rami avvicinantisi rispettivamente ai rami delle Parabole supposte nel (n.° 76.).

Poichè ancora in questo caso il valor minimo che può ottenere m, è a, ed il valor minimo di a è $f(k-p)+f'(k_1-p')$ $+f''(k_2-p'')+$ ec. $+f^{(c)}(k_c-p^{(c)})$ (1.° n.° 84.); può a prima vista sembrare, che la soluzione del Problema presente deducasi, come quella del precedente, da questo valore di a. Ma si rifletta, che quivi mentre si ha, come di sopra $r^{(e)}=a$, ed $e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)})}$ non $>m$, dovendo poi essere $r^{(e)}<r^{(e')}<r^{(e'')}<$ ec. $<r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)}})}$ (4.° n.° 79.), ed $r^{(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)}})}=e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)})}$, non potrà già supporsi $m=a$, e però dovremo cercare la soluzione richiesta con altro mezzo.

Osserviamo, che in conseguenza delle ipotesi fatte, e del metodo esposto nel (n.° 76) esister deve nella Equazione (XXIII), che porrò dotata delle condizioni supposte, la potenza $y_1^{e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(c)})}}$, essendone l'esponente per quanto si è detto poc' anzi $>a$ ed $=fk+f'k_1+f''k_2+$ ec. $+f^{(c)}k_c$ (3.° n.° 79.), ma la massima potenza, che si può contenere della y_1 nella stessa (XXIII), esprimesi con la y_1^m. Dunque attribuendo ad m l'esposto valore $fk+f'k_1+f''k_2+$ec.$+f^{(c)}k_c$ otterremo così il minimo valore, che può avere m, e però il minimo grado a cui può ascendere l Equazione (XXIII), e quindi la (III), onde soddisfare alle condizioni proposte dal Problema, e però avremo risolto il Problema medesimo.

Volendosi determinare l'esponente nelle Curve di grado

minimo, le quali corrispondentemente allo stesso diametro $y = L'x$ godono di quattro rami delle due Parabole $v'^2 = M'x$, $v'^2 = M''x$, di 8 rami avvicinantisi ai rami delle quattro parabole $v'^3 = M'''x^2$, $v'^3 = M^{iv}x^2$, $v'^3 = M^v x^2$, $v'^3 = M^{vi}x^2$, e di 2 rami avvicinantisi ai rami della $v'^5 = M^{vii}x^4$; giacchè si ha in questo esempio $\frac{p}{k} = \frac{1}{2}$, $\frac{p'}{k_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{p''}{k_2} = \frac{4}{5}$ ed $f=2$, $f'=4$, $f''=1$, risponderò, che l' esponente domandato è $= 2.2 + 4.3 + 1.5 = 21$.

87. Debbano le Curve in quistione contenere $2f + 2f' + 2f'' + \text{ec.} + 2f^{(b)}$ rami iperbolici, ed insieme $2f^{(b+1)} + 2f^{(b+2)} + \text{ec.} + 2f^{(b+c)}$ rami parabolici siccome nel (n.° 78.), essendo tutti questi numeri f, f', f'', ec. dati; si chiede l'esponente di quelle tra le indicate Curve, che sono di grado minimo.

Determino i valori delle due quantità.

$$f(k+p) + f'(k_1 + p') + f''(k_2 + p'') + \text{ec.} + f^{(b)}(k_b + p^{(b)}) + f^{(b+1)}(k_{b+1} - p^{(b+1)}) + f^{(b+2)}(k_{b+2} - p^{(b+2)}) + \text{ec.} + f^{(b+c)}(k_{b+c} - p^{(b+c)}), \qquad \text{(LVI)}$$

$$fk + f'k_1 + f''k_2 + \text{ec.} + f^{(b)}k_b + f^{(b+1)}k_{b+1} + \text{ec.} + f^{(b+c)}k_{b+c}, \qquad \text{(LVII)}$$

osservo quale dei due sia maggiore, ed il maggiore costituirà l'esponente domandato. Difatti cominciamo dall'osservare, che rapporto ai rami iperbolici si ha

$$a = f(k+p) + f'(k_1 + p') + f''(k_2 + p'') + \text{ec.} + f^{(b)}(k_b + p^{(b)}) + a^{(b+1)}$$

(n.° 74. 1.° n.° 84.), e riguardo ai parabolici deducesi facilmente dai (n.^{i} 76., 1.° n.° 84.) essere in generale

$$a^{(b+1)} = f^{(b+1)}(k_{b+1} - p^{(b+1)}) + f^{(b+2)}(k_{b+2} - p^{(b+2)}) + \text{ec.} + f^{(b+c)}(k_{b+c} - p^{(b+c)}) a^{(b+c+1)}.$$

Ora essendo dati tutti i numeri f, k, p; f', k_1, p';

f'', k_2, p''; ec.; $f^{(b+c)}$, k_{b+c}, $p^{(b+c)}$; affin di ottenere il valor minimo, che può avere a, basterà nella prima delle espressioni ora esposte attribuire ad $a^{(b+1)}$ il suo valor minimo; ma questo valor minimo di $a^{(b+1)}$ si ottiene dall' espressione seconda col porre in essa il valore più piccolo, che può ricevere $a^{(b+c+1)}$ che è lo zero, giacchè esser deve
$r^{(e^{f+f'+f''+ec+f^{(b+c)}})} = e^{(f+f'+f''+ec.+f^{(b+c)})} = n$ (n.° 73, 4.° n.° 79.).
Dunque, ciò eseguito, il valore più piccolo, che nel caso presente può ottenere a sarà il precedente (LVI). Ciò posto, osserviamo, che nella Equazione (XXIII), la quale supponghiamo dedotta, col porre $y = L'x + y_1$ (n.° 27.), da quella che contiene il chiesto esponente minimo, che chiamo m, esistono necessariamente nella prima linea orizzontale la potenza x^{m-a}, e nella linea $e^{(f+f'+f''+ec.+f^{(b+c)})}$ *sima* la potenza $y_1^{e^{(f+f'+f''+ec.+f^{(b+c)})}}$, e di più l' esponente m indicando il grado della Equazione non può essere minore nè di a, nè di $e^{(f+f'+f''+ec.+f^{(b+c)})}$. Dunque la seconda di queste espressioni ugnagliando il risultato (LVII) (3.° n.° 79.) e il risultato (LVI) essendo il valor minimo che può ricevere a; ne segue, che l' esponente m acquisterà il valor più piccolo, di cui sia capace, ogni qualvolta gli si attribuisca il più grande dei due precedenti valori (LVI), (LVII).

Siano per esempio tre Iperbole assintotiche della specie $v'^2 = Mx^{-3}$, e due della specie $v' = Mx^{-1}$, e siano due Parabole assintotiche della specie $v'^2 = Mx$, tre della specie $v'^5 = Mx^3$, ed una della specie $v'^3 = Mx^2$; e cercandosi relativamente alla medesima retta $y = L'x$, presa rispettivamente come assintoto rettilineo, e come diametro, l'esponente del-

la rispettiva Curva del grado minimo, dirò, che siccome in quest' esempio risulta il valore
(LVI) $= 3.5 + 2.2 + 2.1 + 3.2 + 1.1 = 28$, e l' altro
(LVII) $= 3.3 + 2.1 + 2.1 + 3.5 + 1.3 = 31$, avremo l' esponente richiesto $= 31$. Se le Curve assintotiche fossero quattro della specie $v'^4 = Mx^{-3}$, tre della specie $v'^2 = Mx^{-1}$, e due della specie $v'^3 = Mx$; avendosi allora
(LVI) $= 4.7 + 3.3 + 2.2 = 41$,
(LVII) $= 4.4 + 3.2 + 2.3 = 28$,
il valore di m domandato sarà il primo 41.

88. 1.° Merita riflessione il valore ritrovato per m nel (n.° 86.), e l'altro (LVII) del (n.° prec.), allorchè risulta $>$ (LVI); perchè in questi due casi ottiensi la soluzione dei rispettivi Problemi indipendentemente dai numeratori p, p', p'', ec.; onde qualunque essi siansi, il grado minimo delle Equazioni, o Curve in quistione è in tali casi sempre il medesimo.

2.° Le formole trovate per la soluzione dei Problemi dei precedenti (n.i 85, 86, 87.) ci mostreranno facilmente, se una Curva data può dipendentemente dal suo grado, e corrispondentemente ad uno stesso assintoto o diametro $y = L'x$ contenere rami approssimantisi ai rami di date Iperbole o Parabole. Così dirò, che una Curva del 4.° grado non può con lo stesso assintoto $y = L'x$ avere quattro rami avvicinantisi ai rami delle due Iperbole $v'^2 = M'x^{-1}$, $v'^2 = M''x^{-1}$, perchè si ha $2(2+1) = 6 > 4$ (n.° 85.).

3.° In conseguenza del (n.° 71.), delle supposizioni fatte nei (n.i 85, 86, 87.), e dell' esposto nel (3.° n.° 79.) apparisce, che in tutti e tre i Problemi dei citati (n.i 85, 86, 87.) esiste sempre nella corrispondente Equazione (XXIII) il termine $\overset{(n)}{A} x^{m-n} y_1^{n}$, e che risulta $m = n$ tanto nel (n.° 86.), quanto nel (n.° 87.), mentre ottienesi il valore (LVII) $>$ (LVI), quando poi nello stesso (n.° 87.) si ha (LVII) non $>$ (LVI), e nel (n.° 85.) risulta $m = a = n + fp + f'p' + f''p'' +$ ec.

4.° Se mai si vuole, che esistano valori di β uguali allo zero; avremo anche allora la soluzione dei nostri Problemi (n.[i] 85, 86, 87.) col porre semplicemente lo zero in luogo di quei p, che essendo zero, rendono $\beta = 0$. Se per esempio si voglia nel (n.° 85.), che sia $p^{(b)} = 0$, $p^{(b-1)} = 0$, $p^{(b-2)} = 0$, il valore (LV) diverrà

$$a = f(k+p) + f'(k_1+p') + \text{ec.} + f^{(b-3)}(k_{b-3} + p^{(b-3)}) + f^{(b-2)} k_{b-2} + f^{(b-1)} k_{b-1} + f^{(b)} k_b$$

e questo servirà nella ipotesi presente allo scioglimento del Problema ivi proposto.

89. Sia nella Equazione (VII) (n.° 4.) il valore L′ ripetuto n' volte, l' altro L″ sia replicato le volte n'', il terzo L‴ le volte n''', ec., e fra tutte le Curve, le quali, corrispondentemente a ciascuna delle rette $y = L'x$, $y = L''x$, $y = L'''x$, ec. considerate come assintoti o diametri, sono fornite di rami iperbolici o parabolici simili ai supposti nei (n.[i] 74, 76, 78.), di cui le specie e il numero sian dati, domandansi come nei (n.[i] 85, 86, 87.), quelle, l' Equazioni delle quali sono del grado minimo.

1.° Vogliasi, che i rami, de' quali sono dotate le Curve in quistione, siano, come nei (n.[i] 76, 86.) tutti parabolici: in questa ipotesi io dico, che il minimo grado richiesto viene determinato dal numero $n' + n'' + n''' +$ ec. Infatti relativamente alla prima retta $y = L'x$ abbiamo le Parabole delle specie $v' = Mx^{\frac{p}{k}}$, $v' = Mx^{\frac{p'}{k_1}}$, $v' = Mx^{\frac{p''}{k_2}}$, ec. $v' = Mx^{\frac{p^{(c)}}{k_c}}$, e della prima specie ne abbiamo un numero f, della seconda un numero f', un numero f'' della terza, ec., ed un numero $f^{(c)}$ dell' ultima (n.[i] 76, 86.), e quindi chiamate 1, μ', μ'', ec. $\mu^{(k-1)}$ le radici della Equazione $\mu^k = 1$, chiamate 1, μ'_1, μ''_1, ec. $\mu_1^{(k_1-1)}$ le radici della $\mu^{k_1} = 1$, e così 1, μ'_2, μ''_2, ec., $\mu_2^{(k_2-1)}$

le radici della μ^{k_2}, ec., deducesi agevolmente pel (n.° 18.), che sono tanti valori della y reali in parte, ed in parte immaginarii, ossia tante radici o reali od immaginarie di ciascuna delle Equazioni, che esprimono le Curve richieste, tutte le Serie

$$L'x + Mx^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},\ L'x + \mu' Mx^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'' M$$

$$L'x + Mx^{\frac{p'}{k_1}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'_1 Mx^{\frac{p'}{k_1}} + \text{ec.},\ L'x + \mu''_1 M$$

$$L'x + Mx^{\frac{p''}{k_2}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'_2 Mx^{\frac{p''}{k_2}} + \text{ec.},\ L'x + \mu''_2 Mx$$

ec.

$$L'x + Mx^{\frac{p^{(c)}}{k_c}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'_c Mx^{\frac{p^{(c)}}{k_c}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'_c M$$

nelle quali il coefficiente M delle k serie della prima linea orizzontale deve successivamente ricevere ciascuno degli f valori M', M'', M''', ec. $M^{(f)}$; il coefficiente M delle k_1 serie della linea seconda deve ricevere f' successivi valori determinati; un numero f'' di valori determinati deve in egual modo ottenere il coefficiente M nelle k_2 serie della linea terza, e così in progresso fino ad ottenersene un numero $f^{(c)}$ dal coefficiente M nelle k_c serie dell' ultima linea. Dunque attribuendo attualmente ad M questi f, f' f'', ec. $f^{(c)}$ valori risulterà per y corrispondentemente alla prima retta $y = L'x$ un numero $fk + f'k_1 + f''k_2$, + ec. + $f^{(c)}k_c$ di valori in parte reali, ed in parte immaginarii, il qual numero uguaglia n' (3.° n.° 79.). In egual modo si trova avere y un numero n'' di valori corrispondenti alla retta $y = L''x$, averne un nu-

mero n''' rispettivamente alla $y = L'''x$, e così di seguito. Pertanto le supposizioni fatte esigendo, che i valori della y siano di numero $n' + n'' + n''' +$ ec., la y ascenderà certamente nelle Equazioni che rappresentano Curve dotate dei rami *supposti*, per lo meno ad un tanto grado, e questo per conseguenza sarà il minimo, che essa y possa nelle circostanze supposte ottenere. Ma dal (1.° n.° 84.), e dal (n.° 86.) si vede essere nel caso nostro il valore minimo di $a < n'$, e così i minimi valori delle altre quantità a, che corrispondono alle $y = L''x$, $y = L'''x$, ec. esser tutti per le stesse ragioni minori dei rispettivi numeri n'', n''', ec. Dunque il grado delle Equazioni esprimenti le Curve richieste venendo costituito non già dagli esposti valori minimi di a, ma dalla somma $n' + n'' + n''' +$ ec., ne segue che ec.

$a=f($

Se nella Equazione (VII) esistono per esempio le due radici L', L'', e corrispondentemente al diametro $y = L'x$ si voglia, che le Curve domandate siano fornite di 6 rami della specie $v' = Mx^{\frac{1}{3}}$, di 4 della specie $v' = Mx^{\frac{1}{2}}$, e di altri 4 della specie $v' = Mx^{\frac{2}{3}}$; e rispettivamente al diametro $y = L''x$ abbiansi nelle Curve stesse 2 rami della specie $v'' = Mx^{\frac{2}{5}}$, e 6 della specie $v'' = Mx^{\frac{3}{4}}$: Avendosi in quest' esempio $p = 1$, $k = 3$, $f = 3$; $p' = 1$, $k_1 = 2$, $f' = 2$; $p'' = 2$, $k_2 = 3$, $f'' = 2$, rapporto alla $y = L'x$; e rapporto alla $y = L''x$ avendosi $p = 2$, $k = 5$, $f = 1$, $p' = 3$, $k_1 = 4$, $f' = 3$; il minimo grado dimandato sarà $= 3.\ 3 + 2.\ 2 + 3.\ 2 + 5.\ 1 + 4.\ 3 = 36$. Osservisi che esser deve in questo caso $n' = 3.\ 3 + 2.\ 2 + 3.\ 2 = 19$, $n'' = 5.\ 1 + 4.\ 3 = 17$ (1.° n.° 79.), e però L' sarà radice della (VII) le volte $19 = n'$, ed L'' ne sarà radice le volte $17 = n''$.

2.° Siano i rami delle Curve richieste o tutti iperbolici

come nei (n.^{i} 74, 85.), od iperbolici in parte, e in parte parabolici come nei (n.^{i} 78, 87.). Faccio in questi casi prima la somma $n'+n''+n'''+$ ec.; trovo poscia i minimi valori di a (1.° n.° 84.), denominando a_1 il minimo rapporto alla $y=L'x$, a_2 il minimo riguardo alla $y=L''x$, a_3 il minimo relativamente alla $y=L'''x$, ec.; paragono i risultati $n'+n''+n'''+$ ec. a_1, a_2, a_3, ec. fra di loro; e quello che riscontro maggiore, dirò essere il minimo grado dimandato. In realtà dimostrandosi quì ancora, siccome nel (prec. 1.°), che dalle Equazioni cercate si contengono $n'+n''+n'''+$ ec. valori, reali in parte ed in parte immaginarii della y; ne segue, che ancora quivi, ogniqualvolta risulti $n'+n''+n'''+$ ec. maggiore di ciascuna delle quantità a_1, a_2, a_3, ec., dovrà questa somma costituire il minimo grado richiesto. Ma potendo essa somma divenire non maggiore di uno o di più dei valori a_1, a_2, a_3, ec. se mai ciò accada, preso in allora il più grande tra questi valori, e supposto tale essere a_1, osservo, che risultando $a_1 > n'$, le Equazioni domandate, avuto puramente riguardo ai rami iperbolici e parabolici che spettano alla retta $y=L'x$, non possono essere di un grado minore di a_1 (85, 87.); ma posto, che a_1 esprima un simil grado, essendo questo numero a_1 non minore di ciascuno degli a_2, a_3, ec. $n'+n''+n'''+$ ec., possiam sempre soddisfare, per quanto appartiene agli esponenti delle x_1, y_1 alle condizioni (n.^{i} 74, 76, 78, 85, 86, 87.), che esige l'esistenza degli altri rami iperbolici e parabolici, che riguardano le altre rette $y=L''x$, $y=L'''x$, ec.. Dunque ogniqualvolta sia a_1 maggiore di tutti gli altri valori sovraccennati, verrà da questo a_1 determinato il minimo grado, che chiedesi dal Problema.

Vogliasi per esempio, che le Curve richieste abbiano relativamente alla $y = L'x$ due rami della specie $v' = Mx^{-\frac{3}{2}}$, quattro della specie $v' = Mx^{-\frac{1}{2}}$, e due della specie $v' = Mx^{-\frac{1}{3}}$; corrispondentemente alla retta $y = L''x$ che abbiano sei rami della specie $v'' = Mx^{-\frac{5}{2}}$, e quattro delle specie $v'' = Mx^{-\frac{3}{2}}$, e rispettivamente alla retta $y = L'''x$, che abbiano quattro rami della specie $v''' = Mx^{-\frac{1}{3}}$, due della specie $v''' = Mx^{-\frac{1}{3}}$, due della specie $v''' = Mx^{\frac{1}{2}}$, e due della specie $v''' = Mx^{\frac{2}{3}}$. Poichè in questo caso ottienesi

$n' = 1.2 + 2.2 + 1.3 = 9$, $a_1 = 1.5 + 2.3 + 1.4 = 15$,

$n'' = 3.2 + 2.2 = 10$, $a_2 = 3.7 + 2.5 = 31$,

$n''' = 2.3 + 1.2 + 1.3 = 11$, $a_3 = 2.4 + 1.1 + 1.1. = 10.$

$n' + n'' + n''' = 30.$

e tra questi il valore $a_2 = 31$ è il più grande; dirò che tra le Curve, che sono dotate degli esposti rami, quelle del grado minimo sono espresse da' Equazioni del grado 31*esimo*. In quest' esempio la L' sarà radice dell' Equazione (VII) 9 volte, la L'' le volte 10, ed 11 volte la L'''.

90. 1.° Se supporremo, che i valori di L siano tutti reali, venendo, come di sopra il primo L' ripetuto n' volte, il secondo L'' le volte n'', e così di seguito, e l' ultimo, che dirò $L^{(r)}$, le volte $n^{(r)}$; e se di più supporremo, che il Pro-

blema del (n.° prec.) debba risolversi relativamente a tutte le rette $y=L'x$, $y=L''x$, $y=L'''x$, ec. $y=\overset{(r)}{L}x$, considerate, siccome nel (n.° prec.) quali assintoti, o diametri delle proposte Curve assintotiche: allora avendosi necessariamente $n'+n''+n'''+\text{ec.}+\overset{(r)}{n}$ uguale all'esponente della (VII) e però della (III), verrà sempre il minimo grado richiesto determinato dalla somma $n'+n''+n'''+\text{ec.}+\overset{(r)}{n}$.

2.° Se poi tra i valori di L ne esistono degl' immaginarii oppure se non vuole tenersi conto di tutti i valori medesimi benchè reali; allora il grado minimo verrà a determinarsi come nel (n.° prec.).

3.° Nel Problema del (n.° prec.) comprendesi eziandio il caso, nel quale si voglia, che esistano valori di β uguali allo zero, come apparisce dal (1.° n.° 79.).

91. Ritenute rapporto ai valori di $\beta=0$ le supposizioni, e le determinazioni dei (n.^{i} 29, 80.), fra tutte le Curve, le quali oltre dei rami simili ai considerati nel (n.° 89.) sono dotate in corrispondenza al valore $\beta=0$, ed all' assintoto $y=L'x+M'$ dei $2g+2g'+2g''+\text{ec.}+2\overset{(c)}{g}$, rami iperbolici del (n.° 84.), ove i numeri g, g', g'', ec. $\overset{(c)}{g}$ siano determinati; e così relativamente agli altri assintoti
$y=L'x+M''$, $y=L'x+M'''$, ec. $y=L''x+M'_1$, $y=L''x+M''_1$, ec. $y=L'''x+M'_2$, $y=L'''x+M''_2$, ec., ec. sono fornite di altri rami simili ai precedenti di un numero dato; chiedonsi quelle, le cui Equazioni sono del minimo grado.

Consideriamo in primo luogo i $2g+2g'+2g''+\text{ec.}+2\overset{(c)}{g}$ rami appartenenti all' assintoto $y=L'x+M'$ (n.° 84.), ed osserviamo, che essendo $m-(h+\mu+\alpha)$ pel (4.° n.° 80.) l' esponente del primo termine della prima linea orizzontale della (XXVI) (n.° 29.) necessariamente esistente, non potrà giammai essere $m<h+\mu+\alpha$. Dunque essendo h, μ di valore già determinato (n.° 29, 3.° n.° 80.), se attribuiremo

ad α il valore minimo, e poscia faremo $m=h+\mu+\alpha$; è chiaro, che ci risulterà per m il valore più piccolo, che in queste circostanze possa ottenere. Ora il valore più piccolo di α si ottiene (2.° n.° 84.) ogniqualvolta si ponga $\alpha^{(c^{g+g'+g''+ec.+g^{(c)}})}=0$, risultando da ciò $\alpha=gq+g'q'+g''q''+$ ec.$+g^{(c)}q^{(c)}$; e d'altronde, avendosi $\alpha>\alpha^{(e)}>\alpha^{(e')}>$ ec.$>\alpha^{(e^{g+g'+g''+ec.+g^{(c)}})}$ (n.° 82.), può benissimo senza contradizione supporsi $\alpha^{(e^{g+g'+g''+ec.+g^{(c)}})}=0$, ed $m=h+\mu+\alpha$. Dunque supposto $h+\mu+gq+g'q'+g''q''+$ ec.$+g^{(c)}q^{(c)}=b_1$; questo numero b_1 esprimerà il grado minimo, a cui possono ascendere le Equazioni esprimenti le Curve, che corrispondentemente all' assintoto $y=L'x+M'$ sono dotate dei supposti $2g+2g'+2g''+$ ec.$+2g^{(c)}$ rami iperbolici.

Nel modo medesimo si determinano i gradi minimi, a' quali possono ascendere le Equazioni delle Curve medesime in conseguenza di essere esse fornite di altri rami iperbolici simili ai precedenti corrispondentemente agli altri assintoti $y=L'x+M''$, $y=L'x+M'''$, ec., $y=L''x+M'_1$, $y=L''x+M''_1$, ec. $y=L'''x+M'_2$, ec.; e denominati b_2, b_3, b_4, ec. simili gradi, per determinare in fine il grado richiesto dal Problema paragono fra loro tutti i numeri a_1, a_2, a_3, ec. $n'+n''+n'''+$ ec. (n.° 89.), b_1, b_2, b_3, b_4, ec.; ed il più grande di questi scioglierà evidentemente il quesito.

Siano per esempio la quantità L' ripetuta nella (VII) 12 volte, la L'' le volte 30, e la L''' le volte 2, onde si abbia $n'=12$, $n''=30$, $n'''=2$. Relativamente alla $y=L'x$ vogliansi le Curve fornite di 6 rami iperbolici della specie $v'=Mx^{-\frac{2}{3}}$,

e di 2 rami della specie $v' = Mx^{-\frac{1}{3}}$. Rapporto alla $y = L''x$ supposto costantemente $\beta = 0$, onde risulti $h = n'' = 30$, vogliasi, che si abbiano per M i tre valori M'_1, M''_1, M'''_1 replicati il primo 15 volte, 7 il secondo, ed 8 il terzo, onde sia $l' = 15$, $l'' = 7$, $l''' = 8$ (1.° n.° 80.), e che corrispondentemente all'assintoto $y = L''x + M'_1$ siano le Curve dotate di quattro rami della specie $u''_1 = N_1 x^{-\frac{6}{5}}$, di due rami della specie $u''_1 = N_1 x^{-\frac{2}{3}}$ e di due della specie $u''_1 = N_1 x^{-\frac{1}{2}}$; corrispondentemente all' assintoto $y = L''x + M'_1$ esistano quattro rami della specie $u''_2 = N_1 x^{-\frac{3}{5}}$, e due della $u''_2 = N_1 x^{-\frac{1}{2}}$, e corrispondentemente all'assintoto $y = L''x + M'''_1$ quattro ne esistano della specie $u''_3 = N_1 x^{-\frac{4}{3}}$. Finalmente vogliansi esse Curve fornite riguardo alla retta $y = L'''x$ di due rami parabolici della specie $v''' = M_2 x^{\frac{1}{2}}$. In questa ipotesi risultandoci

$a_1 = 3 \times 5 + 1 \times 4 = 19$,

$b_1 = 30 + 2 \times 6 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 45$

$b_2 = 30 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 37$,

$b_3 = 30 + 2 \times 4 = 38$,

$a_3 = 1 . 1 = 1$,

$n' + n'' + n''' = 12 + 30 + 2 = 44$,

e tra questi valori essendo $b_1 = 45$ il valore più grande, esso costituirà il grado minimo domandato.

92. Domandasi, quale debba essere in generale la forma

delle Equazioni, le quali rappresentano quelle Curve algebriche, che, relativamente alla medesima retta $y = L'x$ considerata come assintoto, sono fornite di $2f + 2f' + 2f'' + \text{ec.} + 2f^{(b)}$ rami iperbolici, essendo già date attualmente e gradatamente, come nel (n.° 74.), le Iperbole, alle quali i supposti rami deggiono avvicinarsi.

Nel (n.° prec.) come pure nei susseguenti (n.[i] 94.95.), nei quali si propongono due Problemi simili a questo, daremo semplicemente per maggiore chiarezza le operazioni pratiche, riserbandoci a darne la dimostrazione nel (n.° 97); e ritenute perciò le solite denominazioni e supposizioni (n.° 74.), comincio dal determinare il minimo valore, che può ottenere la quantità a (1°. n.° 84.) e lo denomino m'. Formo quindi la serie

$$e = 0,\ e' = k,\ e'' = 2k,\ e''' = 3k,\ \text{ec.}\ e^{(f)} = fk,$$

$$r^{(e)} = a = m',\ r^{(e')} = m' - p,\ r^{(e'')} = m' - 2p,\ r^{(e''')} = m' - 3p,\ \text{ec.}\ r^{(e^f)}\ m' - fp,$$

$$e^{(f)} = fk,\ e^{(f+1)} = fk + k_1,\ e^{(f+2)} = fk + 2k_1,\ e^{(f+3)} = fk + 3k_1,\ \text{ec.}\ e^{(f+f')} = fk + f'k_1,$$

$$r^{(e^f)} = m' - fp,\ r^{(e^{f+1})} = m' - fp - p',\ r^{(e^{f+2})} = m' - fp - 2p',\ r^{(e^{f+3})} = m' - fp - 3p',$$

$$\text{ec.}\ r^{(e^{f+f'})} = m' - fp - f'p',$$

$$e^{(f+f')} = fk + f'k_1,\ e^{(f+f'+1)} = fk + f'k_1 + k_2,\ e^{(f+f'+2)} = fk + f'k_1 + 2k_2,\ \text{ec.}$$

$$e^{(f+f'+f'')} = fk + f'k_1 + f''k_2,$$

$$\text{(LVII)}\quad r^{(e^{f+f'})} = m' - fp - f'p',\ r^{(e^{f+f'+1})} = m' - fp - f'p' - p'',\ r^{(e^{f+f'+2})} = m' - fp - f'p' - 2p''$$

$$\text{ec.}\ r^{(e^{f+f'+f''})} = m' - fp - f'p' - f''p'',$$

ec.

$e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}) = fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}$, $e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}+1) =$

$$fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+k_b,$$

$$e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}+2) = fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+2k_b \text{ ec.},$$

$$e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}) = fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b,$$

$$r^{(e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}))} = m'-fp-f'p'-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)},$$

$$r^{(e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}+1))} = m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)}-p^{(b)},$$

$$r^{(e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b-1)}+2))} = m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b-1)}p^{(b-1)}-2p^{(b)}, \text{ ec.}$$

$r^{(e(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}))} = m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b)}p^{(b)}$; considero i valori così ottenuti delle e, e', e'', e''', ec. come esponenti successivi della y_1; sottratti i valori delle $r^{(e)}, r^{(e')}, r^{(e'')}, r^{(e''')}$, ec. dall' esponente generico m, considero i risultati $m-r^{(e)}$, $m-r^{(e')}$, $m-r^{(e'')}$, $m-r^{(e''')}$, ec., come esponenti rispettivamente della x; ed espressi con la lettera G i coefficienti, formo i seguenti termini

$$Gx^{m-m'}, G^{(k)}x^{m-(m'-p)}y_1^k, G^{(2k)}x^{m-(m'-2p)}y_1^{2k}, G^{(3k)}x^{m-(m'-3p)}y_1^{3k}, \text{ ec.}$$

$$G^{(fk)}x^{m-(m'-fp)}y_1^{fk},$$

$$G^{(fk+k_1)}x^{m-(m'-fp-p')}y_1^{fk+k_1}, G^{(fk+2k_1)}x^{m-(m'-fp-2p')}y_1^{fk+2k_1},$$

$$G^{(fk+3k_1)}x^{m-(m'-fp-3p')}y^{fk+3k_1}, \text{ ec. } G^{(fk+f'k_1)}x^{m-(m'-fp-f'p')}y^{fk+f'k_1},$$

$$G^{(fk+f'k_1+k_2)}x^{m-(m'-fp-f'p'-p'')}y_1^{fk+f'k_1+k_2}\,G^{(fk+f'k_1+2k_2)}x^{m-(m'-fp-f'p'-2p'')}y_1^{fk+f'k_1+2k_2},$$

$$\text{ec. } G^{(fk+f'k_1+f''k_2)}x^{m-(m'-fp-f'p'-f''p'')}y_1^{fk+f'k_1+f''k_2}, \qquad \text{(LVIII)}$$

ec.

$$G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+k_b)}x^{m-(m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-p^{(b)})}y_1^{fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec}+k_b},$$

$$G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+2k_b)}x^{m-(m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-2p^{(b)})}y_1^{fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+2k_b}, \text{ ec.}$$

$$G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b)}x^{m-(m'-fp-f'p'-f''p''-\text{ec.}-f^{(b)}p^{(b)})}y_1^{fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b};$$

osservando, che a cagione di essere $n=e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})}=fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b$ (3.° n.° 79.) ed $m'=f(p+k)+f'(p'+k_1)+f''(p''+k_2)+\text{ec.}+f^{(b)}(p^{(b)}+k_b)$, (n.° 85.), l' ultimo dei termini (LVIII) esser deve $=A^{(n)}x^{m-n}y_1^n$ (3.° n.° 75.)

In seguito tra i termini $Gx^{m-m'}$, $G^{(k)}x^{m-(m'-p)}y_1^k$ interpongo gli altri $G'x^{m-t'}y_1$, $G''x^{m-t''}y_1^2$, ec. $G^{(k-1)}x^{m-t^{(k-1)}}y_1^{k-1}$, tra i termini $G^{(k)}x^{m-(m'-p)}y_1^k$, $G^{(2k)}x^{m-(m'-2p)}y_1^{2k}$ interpongo gli altri $G^{(k+1)}x^{m-t^{(k+1)}}y_1^{k+1}$, $G^{(k+2)}x^{m-t^{(k+2)}}y_1^{k+2}$ ec. $G^{(2k-1)}x^{m-t^{(2k-1)}}y_1^{2k-1}$; e così proseguo fino al termine $G^{(fk)}x^{m-(m'-fp)}y_1^{fk}$, avvertendo, che chiamato $G^{(i)}x^{m-t^{(i)}}y_1^i$ uno qualsivoglia dei termini interposti, l' esponente i esprime uno dei numeri interi, che

esistono tra gli o, k, $2k$, ec. fk, e $t^{(i)}$ esprime il numero intero prossimamente maggiore di i e di $m' - i\frac{p}{k}$. Poscia tra l' ultimo termine della prima delle righe (LVIII) e i termini tutti della seconda interpongo, come precedentemente tanti termini, che esprimo in generale per $G^{(i')} x^{m-t^{(i')}} y_1^{i'}$, dove i' riceva successivamente tutti i valori $fk+1$, $fk+2$, ec. $fk+(k_1-1)$, $fk+(k_1+1)$, $fk+(k_1+2)$, ec. $fk+(2k_1-1)$, $fk+(2k_1+1)$, $fk+(2k_1+2)$, ec. $fk+(3k_1-1)$, $fk+(3k_1+1)$ ec. fino ad $fk+(f'k_1-1)$, e dove $t^{(i')}$ esprime l' intero prossimamente maggiore di i', e di $(m'-fp)-(i'-fk)\frac{p'}{k_1}$. Nella stessa guisa tra l'ultimo termine della riga seconda e quei tutti della riga terza faccio l' interpolazione di tanti termini della forma $G^{(i'')} x^{m-t^{(i'')}} y_1^{i''}$ in cui i'' riceve successivamente i valori
$fk+f'k_1+1$, $fk+f'k_1+2$, ec. $fk+f'k_1+(k_2-1)$, $fk+f'k_1+(k_2+1)$ $fk+f'k_1+(k_2+2)$, ec. $fk+f'k_1+(2k_2-1)$, $fk+f'k_1+(2k_2+1)$, ec. fino ad $fk+f'k_1+(f''k_2-1)$, ed il valore di $t^{(i'')}$ è l' intero prossimamente maggiore di i'', e di $(m'-fp-f'p')-(i''-fk-f'k_1)\frac{p''}{k_2}$; e cosi proseguo, interpolando nella maniera medesima ai termini tutti (LVIII) quei termini tutti che mancano nella serie naturale delle potenze della y_1. Finalmente poichè pel (3.° n.° 79.) abbiamo $fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b)}k_b=n$, costruisco i termini $A^{(n+1)} x^{m-(n+1)} y_1^{n+1}$, $A^{(n+2)} x^{m-(n+2)} y_1^{n+2}$, ec. fino al termine $a^{(m)} y_1^m$

Ciò fatto, scrivo un' Equazione, la quale contenga come la (XXIII), le successive potenze y_1^0, y_1, y_1^2, y_1^3, ec. $y_1^k y_1^{k+1}$, ec. y_1^m in tante linee orizzontali; colloco in tali linee, come primi termini moltiplicanti le accennate podestà della y_1 tutti i ritrovati di sopra

$$Gx^{m-m'}, G'x^{m-t'}, G''x^{m-t''}, G'''x^{m-t'''}, \text{ec. } G^{(k)}x^{m-(m'-p)}, G^{(k+1)}x^{m-t^{(k+1)}}, \text{ec. } a^{(m)},$$

aggiungo a questi in ciascuna riga tanti termini moltiplicanti essi pure le corrispondenti potenze della y_1, le quali contengano tutte le altre potenze della x, che decrescono gradatamente dalle indicate $x^{m-m'}$, $x^{m-t'}$, $x^{m-t''}$, ec. fino alla x^0; e il risultato totale, che ne viene, uguagliato allo zero costituirà un' Equazione, dalla quale, sostituito $L'x-y$ invece della y_1, si otterrà la forma domandata delle Equazioni fornite dei supposti rami iperbolici.

Vogliasi per esempio la forma generale delle Equazioni di quelle Curve, le quali hanno sei rami avvicinantisi ai rami delle Iperbole $v'^2=M'x^{-3}, v'^2=M''x^{-3}, v'^2=M'''x^{-3}$, altri due rami approssimantisi ai rami della $v'=M'x^{-1}$, ed altri quattro avvicinantisi ai rami delle $v'^3=M'x^{-1}$, $v'^3=M''x^{-1}$, avendosi nella (VII) il valore L' ripetuto $n=13$ volte. Seguendo le regole generali di sopra stabilite, e posto

$$p=3, k=2, f=3; p'=1, k_1=1, f'=1; p''=1, k_2=3, f''=2$$

trovo immediatamente (1.° n.° 84.)

$$m'=(2+3)3+(1+1)1+(1+3)2=25,$$

$$e=0,\ e'=2,\ e''=4,\ e'''=6=e^{(f)},$$

$$r^{(e)}=a=m'=25,\ r^{(e')}=22,\ r^{(e'')}=19,\ r^{(e''')}=16=r^{(e^f)},$$

$$e^{iv}=7=e^{(f+f')},$$

$$r^{(e^{iv})}=15=r^{(e^{f+f'})},$$

$$e^{v}=10,\ e^{vi}=13=e^{(f+f'+f'')},$$

$$r^{(e^{v})}=14,\ r^{(e^{vi})}=13=r^{(e^{f+f'+f''})}$$

Formati in conseguenza i termini

$G x^{m-25}$, $G'' x^{m-22} y_1^2$, $G^{iv} x^{m-19} y_1^4$, $G^{vi} x^{m-16} y_1^6$,

$G^{vii} x^{m-15} y_1^7$,

$G^{x} x^{m-14} y_1^{10}$, $G^{xiii} x^{m-13} y_1^{13}$,

col fare giusta le regole stabilite, che t', t''', t^{v} esprimano gl' interi prossimamente maggiori dei rispettivi valori

$25 - \frac{3}{2}$, $25 - \left(3 + \frac{3}{2}\right)$, $25 - \left(6 + \frac{3}{2}\right)$, e degli altri 1, 3, 5, e però che siano uguali ai tre numeri 24, 21, 18; interpongo ai precedenti termini della prima linea i tre $G' x^{m-24} y_1$, $G''' x^{m-21} y_1^3$, $G^{v} x^{m-18} y_1^5$. Tra il termine ultimo della prima linea e quello della seconda non ha luogo alcuna interpolazione. Per interporre poi i dovuti termini della linea seconda, e gli altri tutti della terza, determino i numeri t^{viii}, t^{ix}, t^{xi}, t^{xii} in modo che siano interi prossimamente maggiori de' numeri 8, 9, 11, 12, e degli altri $15 - (8-7)\frac{1}{3}$,

$15 - (9-7)\frac{1}{3}$, $15 - (11-7)\frac{1}{3}$, $15 - (12-7)\frac{1}{3}$, e però che uguaglino i numeri 15, 15, 14, 14; e tali termini saranno $G^{viii} x^{m-15} y_1^8$, $G^{ix} x^{m-15} y_1^9$, $G^{xi} x^{m-14} y_1^{11}$, $G^{xii} x^{m-14} y_1^{12}$. Formati infine i termini $A^{xiv} x^{m-14} y_1^{14}$, $A^{xv} x^{m-15} y_1^{15}$, ec. $a^{(m)} y_1^m$, e cangiato

G^{xiii} in A^{xiii}, stabilisco l' Equazione

$$\left.\begin{array}{l}
\left(G\, x^{m-25} + H\, x^{m-26} + I\, x^{m-27} + \text{ec.} + V \right) + \\
\left(G'\, x^{m-24} + H'\, x^{m-25} + I'\, x^{m-26} + \text{ec.} \right) y_1 + \\
\left(G''\, x^{m-22} + H''\, x^{m-23} + I''\, x^{m-24} + \text{ec.} \right) y_1^2 + \\
\left(G'''\, x^{m-21} + H'''\, x^{m-22} + I'''\, x^{m-23} + \text{ec.} \right) y_1^3 + \\
\left(G^{iv}\, x^{m-19} + H^{iv}\, x^{m-20} + I^{iv}\, x^{m-21} + \text{ec.} \right) y_1^4 + \\
\left(G^{v}\, x^{m-18} + H^{v}\, x^{m-19} + I^{v}\, x^{m-20} + \text{ec.} \right) y_1^5 + \\
\left(G^{vi}\, x^{m-16} + H^{vi}\, x^{m-17} + I^{vi}\, x^{m-18} + \text{ec.} \right) y_1^6 + \\
\left(G^{vii}\, x^{m-15} + H^{vii}\, x^{m-16} + I^{vii}\, x^{m-17} + \text{ec.} \right) y_1^7 + \\
\left(G^{viii}\, x^{m-15} + H^{viii}\, x^{m-16} + I^{viii}\, x^{m-17} + \text{ec.} \right) y_1^8 + \\
\left(G^{ix}\, x^{m-15} + H^{ix}\, x^{m-16} + I^{ix}\, x^{m-17} + \text{ec.} \right) y_1^9 + \\
\left(G^{x}\, x^{m-14} + H^{x}\, x^{m-15} + I^{x}\, x^{m-16} + \text{ec.} \right) y_1^{10} + \\
\left(G^{xi}\, x^{m-14} + H^{xi}\, x^{m-15} + I^{xi}\, x^{m-16} + \text{ec.} \right) y_1^{11} + \\
\left(G^{xii}\, x^{m-14} + H^{xii}\, x^{m-15} + I^{xii}\, x^{m-16} + \text{ec.} \right) y_1^{12} + \\
\left(A^{xiii}\, x^{m-13} + B^{xiii}\, x^{m-14} + C^{xiii}\, x^{m-15} + \text{ec.} \right) y_1^{13} + \\
\left(A^{xiv}\, x^{m-14} + B^{xiv}\, x^{m-15} + \text{ec.} \ldots \right) y_1^{14} + \\
\left(A^{xv}\, x^{m-15} + B^{xv}\, x^{m-16} + \text{ec.} \ldots \right) y_1^{15} + \\
\qquad\qquad\qquad \text{ec.} \\
a^{(m)}\, y_1^{m}
\end{array}\right\} = 0$$

e collocato in questa $y - L'x$ in vece della y_1, avremo infine l'Equazione domandata.

93. 1.° Il valore più piccolo, che può ottenere l'esponente m, è m', nell'apposto esempio 25. Potrà poi esso m avere ciascuno degli altri valori $m'+1$, $m'+2$, $m'+3$, ec. nell'esempio 26, 27, 28, ec.

2.° I coefficienti M', M'', M''', ec. nelle Equazioni delle Iperbole assintotiche sono radici nel caso generale delle Equazioni

$$G + G^{(k)} M^{k} + G^{(2k)} M^{2k} + G^{(3k)} M^{3k} + \text{ec.} + G^{(fk)} M^{fk} = 0,$$

$$G^{(fk)} + G^{(fk+k_1)} M^{k_1} + G^{(fk+2k_1)} M^{2k_1} + G^{(fk+3k_1)} M^{3k_1} + \text{ec.} + G^{(fk+f'k_1)} M^{f'k_1} = 0.$$

$$G^{(fk+f'k_1)} + G^{(fk+f'k_1+k_2)} M^{k_2} + G^{(fk+f'k_1+2k_2)} M^{2k_2} + \text{ec.} + G^{(fk+}$$

ec.

$$G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1})} + G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+k_b)} M^{k_b}$$

$$+ G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+2k_b)} M^{2k_{b-1}} + \text{ec.}$$

$$+ G^{(fk+f'k_1+f''k_2+\text{ec.}+f^{(b-1)}k_{b-1}+f^{(b)}k_b)} M^{f^{(b)}k_b} = 0,$$

e nell'esempio delle

$$G + G'' M^2 + G^{iv} M^4 + G^{vi} M^6 = 0,$$

$$G^{vi} + G^{vii} M = 0,$$

$$G^{vii} + G^{x} M^3 + G^{xiii} M^6 = 0.$$

Quindi segue, che se sono dati attualmente i valori M', M'', M''', ec.; allora col fare le loro somme, le somme dei loro prodotti a due a due, dei prodotti a tre a tre, ec. otterremo i valori dei coefficienti G, $G^{(k)}$, $G^{(2k)}$, ec. Che se gli accennati M', M'', M''', ec. si volessero determinare dipendentemente da certe condizioni date: allora converrebbe col mezzo di tali condizioni ottenere prima le Equazioni (LIX); e quindi la soluzione loro somministrerebbe i valori degli esposti M', M'', M''', ec. In questo secondo caso potendo i valori di M risultare immaginarii; mancheranno in simile circostanza

i rami supposti, ed esisteranno in loro vece a distanze infinite punti conjugati (3.°, 4.° n.° 60.).

3.° Tolti i coefficienti indicati con le lettere G, e i due $A^{(n)}$, $a^{(m)}$ necessariamente diversi dallo zero (3.° n.° 75.) gli altri tutti della Equazione richiesta potranno avere un valore reale qualunque, compreso lo zero, e sempre rimarrà sciolto il Problema del (n.° prec.).

94. Si cerca la forma delle Equazioni esprimenti quelle Curve, le quali contengono $2f+2f'+2f''+\text{ec.}+2f^{(c)}$ rami parabolici approssimantisi a tante Parabole quali sono quelle del (n.° 76.) riferite tutte allo stesso diametro $y=L'x$.

Determino in primo luogo il valore minimo del numero a, il quale pel (1.° n.° 84.) sarà in questo caso $(k-p)f+(k_1-p')f'+(k_2-p'')f''+\text{ec.}+(k_c-p^{(c)})f^{(c)}$, e lo denomino m': determino quindi i valori delle quantità e, e', e'', e''', ec. $r^{(e)}, r^{(e')}, r^{(e'')}, r^{(e''')}$, ec. corrispondenti alle (LVII), avvertendo, che mentre gli esponenti e, e', e'', e''', ec. sono quì pienamente gli stessi, che gli esposti (LVII), tali poi non sono le rispettive quantità $r^{(e)}, r^{(e')}, r^{(e'')}, r^{(e''')}$, ec. giacchè quivi i numeri p, $2p$, $3p$, ec. invece di sottraersi, si deggiono sommare con m', e si ottengono così i valori

$$r^{(e)}=m',\ r^{(e')}=m'+p,\ r^{(e'')}=m'+2p,\ r^{(e''')}=m'+3p,\ \text{ec.}$$

$$r^{(e^{f})}=m'+fp,\ r^{(e^{f+1})}=m'+fp+p',\ r^{(e^{f+2})}=m'+fp+2p',\ \text{ec.}$$

$r^{(e^{f+f'})}=m'+fp+f'p''$, ec. ec. Ciò fatto, e ritenuto essere m l' esponente generale delle Equazioni richieste, formo i termini $Gx^{(m-m')}$, $G^{(k)}x^{m-(m'+p)}y_1^{k}$, $G^{(2k)}x^{m-(m'+2p)}y_1^{2k}$ ec. simili ai (LVIII); interpongo, come nel (n.° 92.), i termini, che

sorgono dalle formole $G^{(i)} x^{m-t^{(i)}} y_1^{\,i}$ $G' x^{m-t^{(i')}} y_1^{\,i'}$ G ec., osservando, che quì i numeri i, i', i'', i''', ec. hanno lo stesso significato, che nel (n.° 92.), e gli altri $t^{(i)}, t^{(i')}, t^{(i'')}, t^{(i''')}$, ec. esprimono gl' interi, che sono in corrispondenza prossimamente maggiori dei valori i, i', i'', i''', ec. e degli altri $m' + i\frac{p}{k}$, $(m'+fp)+(i'-fk)\frac{p}{k_1}$, $(m'+fp+f'p')+(i''-fk-f'k_1)\frac{p''}{k_2}$, $(m'+fp+f'p'+f''p'')+(i'''-f'k-f''k_1-f''k_2)\frac{p'''}{k3}$, ec. Formati infine quì ancora i termini $A^{(n)} x^{m-n} y_1^{\,n}$, $A^{(n+1)} x^{m-(n+1)} y^{n+1}$, $A^{(n+2)} x^{m-(n+2)} y_1^{\,n+2}$, ec. $a^{(m)} y_1^{\,m}$, costruisco con tutti i termini così stabiliti, e con gli altri, che contengono tutte rispettivamente le potenze inferiori della x, siccome nel cit.° (n.° 92.), un' Equazione, e questa sarà la richiesta èsprimente tutte le Curve, le quali contengono i supposti rami parabolici.

Cercasi per esempio l' Equazione di quelle Curve, le quali contengono due rami parabolici approssimantisi ai rami della $v'^2 = M'x$, ed altri quattro approssimantisi ai rami delle $v'^3 = M'x^2$, $v'^3 = M''x^2$. Poichè in questo esempio si ha $m' = f(k-p) + f'(k_1 - p') = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$, ne verrà

$e = 0$, $e' = k = 2 = e^{(f)}$, $e'' = fk + k_1 = 2 + 3 = 5$, $e''' = fk + f'k_1 = 2 + 6 = 8$,

$r^{(e)} = m' = 3$, $r^{(e')} = m' + p = 3 + 1 = 4 = r^{(e^f)}$, $r^{(e'')} = m' + fp + p' = 4 + 2 = 6$, $r^{(e''')} = m' + fp + f'p' = 8$, e avremo perciò i termini

$G x^{m-3}$, $G'' x^{m-4} y_1^{\,2}$, $G^{v} x^{m-6} y_1^{\,5}$, $G^{v'''} x^{m-8} y_1^{\,8} = A^{v'''} x^{m-8} y_1^{\,8}$.

Onde fare in seguito le dovute interpolazioni, pongo i termini generali $G^{(i)} x^{m-t^{(i)}} y_1^{\,i}$, $G^{(i')} x^{m-t^{(i')}} y_1^{\,i'}$, e poichè supposto il

primo numero $i=1$, ed il secondo i' successivamente $=3, 4, 6, 7$, trovasi con le regole stabilite in corrispondenza $\overset{(i)}{t}=4$, $\overset{(i')}{t}=5, 6, 7, 8$, i termini da interporsi saranno $G'x^{m-4}y_1$, $G'''x^{m-5}y_1^3$, $G^{iv}x^{m-6}y_1^4$, $G^{vi}x^{m-7}y_1^6$, $G^{vii}x^{m-8}y_1^7$.
Finalmente avendosi $n=fk+f'k_1=2+2\times3=8$, e però risultando $A^{(n+1)}x^{m-(n+1)}y_1^{n+1}=A^{ix}x^{m-9}y_1^9$, $A^{(n+2)}x^{m-(n+2)}y_1^{n+2}=A^{x}x^{m-10}y_1^{10}$, ec. l' Equazione cercata sarà la

$$\left.\begin{array}{l}
\left(Gx^{m-3}+H\,x^{m-4}+Ix^{m-5}+\text{ec.}\right)+\\
\left(G'x^{m-4}+H'x^{m-5}+I'x^{m-6}+\text{ec.}\right)y_1+\\
\left(G''x^{m-4}+H''x^{m-5}+I''x^{m-6}+\text{ec.}\right)y_1^2+\\
\left(G'''x^{m-5}+H'''x^{m-6}+I'''x^{m-7}+\text{ec.}\right)y_1^3+\\
\left(G^{iv}x^{m-6}+H^{iv}x^{m-7}+I^{iv}x^{m-8}+\text{ec.}\right)y_1^4+\\
\left(G^{v}x^{m-6}+H^{v}x^{m-7}+I^{v}x^{m-8}+\text{ec.}\right)y_1^5+\\
\left(G^{vi}x^{m-7}+H^{vi}x^{m-8}+I^{vi}x^{m-9}+\text{ec.}\right)y_1^6+\\
\left(G^{vii}x^{m-8}+H^{vii}x^{m-9}+I^{vii}x^{m-10}+\text{ec.}\right)y_1^7+\\
\left(A^{viii}x^{m-8}+B^{viii}x^{m-9}+G^{viii}x^{m-10}+\text{ec.}\right)y_1^8+\\
\left(A^{ix}x^{m-9}+B^{ix}x^{m-10}+\text{ec.}\right)y_1^9+\\
\left(A^{x}x^{m-10}+\text{ec.}\right)y_1^{10}+\\
\qquad\qquad\text{ec.}\\
a^{(m)}y_1^m
\end{array}\right\}=0,$$

mentre in essa si sostituisca $y - L'x$ in vece di y_1.

Le stesse Equazioni relative ai coefficienti M', ec. e le riflessioni stesse, che si sono fatte nel (n.° 93.) hanno luogo quì ancora.

95. Richiedesi, quali debbano essere le Equazioni di quelle Curve, le quali relativamente alla stessa retta $y = L'x$, sono fornite di $2f + 2f' + 2f'' + \text{ec.} + 2f^{(b)}$ rami iperbolici, e di $2f^{(b+1)} + 2f^{(b+2)} + 2f^{(b+3)} + \text{ec.} + 2f^{(b+c)}$ rami parabolici simili agli esposti nel (n.° 78).

Denominato al solito m' il minimo valore di a determinato come nel (n.° 87.), trovo in primo luogo, operando giusta il (n.° 92.) gli esponenti (LVII), e poscia i termini (LVIII). Ottenuti così i valori

$$e^{(f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)})} = fk + f'k_1 + f''k_2 + \text{ec.} + f^{(b)}k_b,$$

$$r(e^{f+f'+f''+\text{ec.}+f^{(b)}}) = m' - fp - f'p' - f''p'' - \text{ec.} - f^{(b)}p^{(b)} \text{ (n.° 92.)},$$

e denominato il primo di questi H, il secondo m'', truovo giusta il (n.° 94.) i termini che succedono agli accennati (LVIII), e compreso l' ultimo di essi, tali saranno i seguenti

$$G^{(H)} x^{m-m''} y_1^{H},\; G^{(H+k_{b+1})} x^{m-(m''+p^{(b+1)})} y_1^{H+k_{b+1}},\; G^{(H+2k_{b+1})} x^{m-(m''+2p^{(b+1)})} \times y_1^{H+2k_{b+1}},$$

$$G^{(H+3k_{b+1})} x^{m-(m''+3p^{(b+1)})} y_1^{H+3k_{b+1}}, \text{ec.};\; G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1})} x^{m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)})} \times y_1^{H+f^{(b+1)}k_{b+1}},$$

$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2})} x^{m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)}+p^{(b+2)})} y_1^{H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2}}. \quad \text{(LX)}$$

$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2k_{b+2})}\,x^{m-(m''+f^{(b+1)}p_{b+1}+2p_{b+2})}\,y_1^{H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2k'_{b+2}}$$

ec.

$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c)}k_{b+c})}\,x^{m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)}+f^{(b+2)}p^{(b+2)}+\text{ec.}+f^{(b+c)}p^{(b+c)})}\,y_1^{H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c)}k_{b+c}}.$$

Fra tutti i termini fin quì trovati faccio le interpolazioni dovute (n.[i] 92, 94.), operando rapporto ai termini da interporsi ai termini primi come nel (n.° 92.) e rapporto a quelli, che si deggiono interporre ai secondi, ponendo, giusta il (n.° 94.), che nei termini

$$G^{(i^{b+1})}\,x^{m-t(i^{b+1})}\,y_1^{i^{(b+1)}},$$

$$G^{(i^{b+2})}\,x^{m-t(i^{b+2})}\,y_1^{i^{(b+2)}},\quad G^{(i^{b+3})}\,x^{m-t(i^{b+3})}\,y_1^{i^{(b+3)}},$$ ec. il numero $i^{(b+1)}$ esprima uno dei numeri

$H+1$, $H+2$, ec. $H+k_{b+1}-1$, $H+k_{b+1}$, $H+k_{b+1}+1$, $H+k_{b+1}+2$, ec. $H+2k_{b+1}-1$, $H+2k_{b+1}+1$, $H+2k_{b+1}+2$, ec. $H+3k_{b+1}-1$, $H+3k_{b+1}+1$, ec. $H+f^{(b+1)}k_{b+1}-1$, il numero $i^{(b+2)}$ rappresenti uno dei $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2$, ec. $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2}-1$ $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2}+1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2}+2$, ec. $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2k_{b+2}-1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2k_{b+2}+1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+2k_{b+2}+2$, ec. $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}-1$.

il numero $i^{(b+3)}$ esprima uno dei valori

$H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+2$, ec.

$H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+k_{b+3}-1$, $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+k_{b+3}+1$, ec. ec.,

$H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+f^{(b+3)}k_{b+3}-1$; e così in progresso:

e ponendo, che ai numeri $t^{(i^{b+1})}$, $t^{(i^{b+2})}$, $t^{(i^{b+3})}$, ec. si attribuiscono rispettivamente i valori prossimamente maggiori degli $i^{(b+1)}$, $i^{(b+2)}$, $i^{(b+3)}$ ec., e dei $m''+(i^{(b+1)}-H)\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}$, $(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)})+(i^{(b+2)}-H-f^{(b+1)}k_{b+1})\frac{p^{(b+2)}}{k_{b+2}}$, $(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)}+f^{(b+2)}p^{(b+2)})+(i^{(b+3)}-H-f^{(b+2)}k_{b+2}-f^{(b+3)}k_{b+3})\frac{p^{(b+3)}}{k_{b+3}}$, ec. L' ultimo dei termini (LX) pel (3.° n.° 79.) si ridurrà evidentemente all' $A^{(n)}x^{m-n}y_1^{n}$. Quindi formati in fine i termini $A^{(n-1)}x^{m-(n+1)}y_1^{n+1}$, $A^{(n+2)}x^{m-(n+2)}y_1^{n+2}$, $A^{(n+3)}x^{m-(n+3)}y_1^{n+3}$ ec. $a^{(m)}y_1^{m}$, costruisco siccome nei citati (n.[i] 92, 94.) con tutti questi termini insieme e gli altri, che corrispondentemente a ciascuna podestà della y_1 contengono tutte le potenze inferiori della x un' Equazione; e questa, collocato $y-L'x$ in vece della y_1 sarà la richiesta.

Siano per esempio $v'=M'x^{-2}$, $v'=M''x^{-2}$, $v'=M'x^{-1}$, $v'=M''x^{-1}$, le iperbole, $v'^3=M'x$, $v'^2=M'x$ le parabole, alle quali si vuole, che accostinsi i rami di una Curva; e se ne cerca l'Equazione generica. Essendo in questo caso $-p=-2$, $k=1$, $-p^{(b)}=-1$, $k_b=1$, $p^{(b+1)}=1$, $k_{b+1}=3$, $p^{(b+c)}=1$, $k_{b+c}=2$,

$$f=2,\ f^{(b)}=2,\ f^{(b+1)}=1,\ f^{(b+c)}=1,$$

e però $fk+f^{(b)}k_b+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+c)}k_{b+c}=$
$2.1+2.1+1.3+1.2=9$, $f(k+p)+f^{(b)}(k_b+p^{(b)})+$
$f^{(b+1)}(k_{b+1}-p^{(b+1)})+f^{(b+c)}(k_{b+c}-p^{(b+c)})=2.3+2.2+1.2+1.1=13$,
pei (3.° n.° 79, n.° 87.) avremo $n=9$, $m'=13$, e quindi, pel (n.° 92.)
$e=0$, $e'=1$, $e''=2$, $e'''=3$, $e^{iv}=4=h$, $e^{v}=7$, $e^{vi}=9=n$;
$r^{(e)}=13$, $r^{(e')}=11$, $r^{(e'')}=9$, $r^{(e''')}=8$, $r^{(e^{iv})}=7=m''$, $r^{(e^{v})}=8$, $r^{(e^{vi})}=9=n$.
Si otterranno perciò i termini

$$Gx^{m-13},\ G'x^{m-11}y_1,\ G''x^{m-9}y_1^2,\ G'''x^{m-8}y_1^3,\ G^{iv}x^{m-7}y_1^4,$$
$$G^{vi}x^{m-8}y_1^7,\ A'^{x}x^{m-9}y_1^9;$$

e tra i primi cinque di questi termini non ha luogo alcuna interpolazione; tra il quinto ed il sesto, per essere $m''=7$, $H=4$, $\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}=\frac{1}{3}$, si dovranno interporre i due termini $G'x^{m-8}y_1^5$, $G^{v'}x^{m-8}y_1^4$, e tra il sesto e l' ottavo ossia l' ultimo avendosi $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}=\frac{1}{2}$; si dovrà interporre il termine $G^{vii}x^{m-9}y_1^8$. Per conseguenza, aggiunti i termini $A^{x}x^{m-10}y_1^{10}$, ec. $a^{(m)}y_1^m$, si otterrà nella seguente l'Equazione domandata,

$$(Gx^{m-13}+Hx^{m-14}+\text{ec.})+(G'x^{m-11}+H'x^{m-12}+\text{ec.})y_1+(G''x^{m-8}+H''x^{m-9}+\text{ec.})y_1^2+$$
$$(G'''x^{m-8}+H'''x^{m-9}+\text{ec.})y_1^3+(G^{iv}x^{m-7}+H^{iv}x^{m-8}+\text{ec.})y_1^4+(G^{v}x^{m-8}+H^{v}x^{m-9}+\text{ec.})y_1^5+$$
$$(G^{vi}x^{m-8}+H^{vi}x^{m-9}+\text{ec.})y_1^6+(G^{vii}x^{m-8}+H^{vii}x^{m-9}+\text{ec.})y_1^7+(G^{viii}x^{m-9}+H^{viii}x^{m-10})y_1^8+$$
$$(A'^{x}x^{m-9}+B'^{x}x^{m-10}+\text{ec.}y)_1^9+(A^{x}x^{m-10}+\text{ec.})y_1^{10}+\text{ec.}+a^{(m)}y_1^m=0,$$

mentre in essa in vece di y_1 si ponga $y-L'x$.

96. 1.° I valori dei coefficienti M nelle Iperbole verranno generalmente compresi nelle Equazioni (LIX) (2.° n.° 93.); e i valori dei coefficienti delle Parabole si comprenderanno dalle

$$G^{(H)}+G^{(H+k_{b+1})}M^{k_{b+1}}+G^{(H+2k_{b+1})}M^{2k_{b+1}}+\text{ec.}+G^{(H+f^{(k+1)}k_{b+1})}M^{f^{(b+1)}k_{b+1}}=0,$$

$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1})}+G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+k_{b+2})}M^{k_{b+2}}+G^{(H+f^{b+1}k_{b+1}+2k_{b+2})}M^{2k_{b+2}}$$
$$+\text{ec.}+G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2})}M^{f^{(b+2)}k_{b+2}}=0, \qquad \text{(LXI)}$$

ec.

$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(l+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c-1)}k_{b+c-1})}$$
$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c-1)}k_{b+c-1}+k_{b+c})}M^{k_{b+c}}+$$
$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c-1)}k_{b+c-1}+2k_{b+c})}M^{2k_{b+c}}+\text{ec.}+$$
$$G^{(H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec.}+f^{(b+c-1)}k_{b+c-1}+f^{(b+c)}k_{b+c})}M^{f^{(b+c)}k_{b+c}}=0,$$

dove è facile a vedersi, che si applicano quelle riflessioni medesime, che abbiamo esposte nei (2.° 3.° n.° 93.),

2.° Supponghiamo, che a norma di quanto si è detto nel (1.° n.° 79.) si abbia nel (n.° 78.) $p^{(b+1)}=0$, $p^{(b+2)}=0$, ec. $p^{(b+c)}=0$, e posto $b+c=r$, supponghiamo, che le Equazioni $v'=Mx^{\frac{p^{(r+1)}}{k_{r+1}}}$, $v'=Mx^{\frac{p^{(r+2)}}{k_{r+2}}}$, ec. $v'=Mx^{\frac{p^{(r+s)}}{k_{r+s}}}$ esprimano le Parabole riferite al diametro $y=L'x$, alle quali si avvicinano rispettivamente $2f^{(r+1)}$, $2f^{(r+2)}$, ec. $2f^{(r+s)}$ rami della Curva sup-

posta. Volendosi in questa ipotesi la soluzione del Problema del (n.° 95.), non dovremo che eseguire il metodo esposto in tal numero, avvertendo però nei termini (LX) e nei valori $t^{(i^{b+1})}$, $t^{(i^{b+2})}$, $t^{(i^{b+3})}$, ec. del citato (n.° 95.) di porre lo zero invece dei $p^{(b+1)}$, $p^{(b+2)}$, $p^{(b+3)}$, ec. $p^{(b-c)}$ onde la x negl' indicati termini (LX), e nei suoi interposti avrà sempre in questo caso l' esponente $m-m''$. Cambiando poi nei citati (LX) e negl' interposti le lettere b, c rispettivamente nelle r, s; e collocando in vece della H la lettera H' esprimente il valore $H+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+\text{ec}+f^{(b+c)}k_{b+c}$, otterremo così da quelli i termini, che nelle Equazioni richieste dipendono dai rami approssimantisi ai rami delle Parabole $v'=Mx^{\frac{p^{(r+1)}}{k_{r+1}}}$, $v'=Mx^{\frac{p^{(r+2)}}{k_{r+2}}}$, ec. ora supposte.

3.° Per la determinazione dei valori dei coefficienti M nelle Equazioni, nelle quali si ha $p^{(b+1)}=p^{(b+2)}=p^{(b+3)}=\text{ec.}=p^{(b+c)}=0$, avvertasi, che si otterranno bensì gli stessi termini delle Equazioni (LXI); ma a cagione di essere

$$\beta^{(b+1)}=\frac{0}{k_{b+1}},\ \beta^{(b+2)}=\frac{0}{k_{b+2}};\ \beta^{(b+3)}=\frac{0}{k_{b+3}},\ \text{ec.}\ \beta^{(b+c)}=\frac{0}{k_{b+c}},$$

valori tutti $=0$, non potranno gl' indicati termini che formare un' Equazione sola corrispondente alla determinata nel (n.° 29.). Dalle medesime (LXI) poi si avranno in tante Equazioni distinte i valori di M coefficienti nelle $v'=Mx^{\frac{p^{(r+1)}}{k_{r+1}}}$, $v'=Mx^{\frac{p^{(r+2)}}{k_{r+2}}}$, ec. mentre si cangino in esse le b, c, H nelle r, s, H'.

97. Affin di conoscere la ragione, per cui i metodi es-

posti nei precedenti (n.^{i} 92, ec. 95.) somministrano la soluzione dei Problemi ivi accennati; osserviamo, che supposto essere la (III) (n.° 1.) l'Equazione richiesta, per essa risolti si avranno tali Problemi, ogniqualvolta, ottenuta col porre $y = L'x + y_1$ (n.° 2.) la (XXIII) (n.° 27.), siasi in quest'ultima Equazione soddisfatto alle condizioni seguenti: 1.° che ponendo in essa (XXIII) $x = \infty$, vi rimangano solamente quei termini, i quali col porre $x = Mx^{\beta}$, e β successivamente $= \frac{-p}{k}, \frac{-p'}{k_1}, \frac{-p''}{k_2}$, ec. $\frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}$, ec. $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$, somministrino successivamente tante Equazioni in M contenenti opportunamente tutti i valori di essa M, che esistono nelle Equazioni delle Iperbole, e delle Parabole date: 2.° che queste Equazioni in M siano tante, quanti sono gli esponenti $-\frac{p}{k}, -\frac{p'}{k_1}, -\frac{p''}{k_2}$ ec. $\frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$, e la prima di esse corrispondente all'esponente primo $-\frac{p}{k}$ contenga i soli valori di M delle prime f Equazioni $v' = M'x^{-\frac{p}{k}}$, $v' = M''x^{-\frac{p}{k}}$, ec., $v' = M^{(f)}x^{-\frac{p}{k}}$, e nei diversi suoi termini contenga della incognita M soltanto le potenze M^0, M^k, M^{2k}, M^{3k}, ec: M^{fk} (n.° 21.); l' Equazione seconda corrispondente all' esponente $-\frac{p'}{k_1}$ contenga solamente tutti gli f valori di M delle Equazioni

$$v' = M'x^{-\frac{p'}{k_1}},\ v' = M''x^{-\frac{p'}{k_1}},\ v' = M'''x^{-\frac{p'}{k_1}} \text{ ec. } v' = M^{(f)}x^{-\frac{p'}{k_1}},$$

e in essa l' incognita M ascenda soltanto alle podestà, che vengono indicate dai numeri 0, k_1, $2k_1$, $3k_1$, ec. $f'k_1$, e così di seguito: 3.° finalmente, che dovendo essere n (n.° 15.) $= fk + f'k_1 + f''k_2 +$ ec. $+ f^{(b+c)}k_{b+c}$ (3.° n.° 79.) abbiasi $A^{(n)}$

diverso dallo zero (n.° 27.), ed essendo m' il valor minimo, che, poste le condizioni dei Problemi, può ricevere il numero a (n.^{i} 92, 94, 95.), nella prima linea orizzontale della (XXIII) non esista alcun termine, che preceda $Gx^{m-m'}$ (n.° 71.).

Ora col metodo da noi praticato (n.^{i} 92, ec. 95.) abbiamo prima determinati nelle linee (LVIII) tanti termini, nei quali gli esponenti della x, e quelli della y formano tante serie aritmetiche, delle quali quelle che provengono dagli esponenti della y, hanno per primi termini rispettivamente i numeri $0, f'k, fk+f'k_1, fk+f'k_1+f''k_2$ ec. $fk+f'k_1+f''k_2+$ ec. $+f^{(b)}k_b = \mathrm{H}$,

$\mathrm{H}+f^{(b+1)}k_{b+1}$, $\mathrm{H}+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}$, ec.

$\mathrm{H}+f^{(b+1)}k_{b+1}+f^{(b+2)}k_{b+2}+$ ec. $+f^{(b+c-1)}k_{b+c-1}$

(n.^{i} 92, 95.), e per differenze i numeri k, k_1, k_2, ec. k_{b+1}, k_{b+2}, ec. k_{b+c}; e le serie provenienti dagli esponenti della x hanno per termini primi le quantità $m-m'$, $m-(m'-fp)$, $m-(m'-fp-f'p')$, $m-(m'-fp-f'p'-f''p'')$, ec., $m-(m'-fp-f'p'-f''p''-$ ec. $-f^{(b)}p^{(b)}) = m-m''$ (n.^{i} 92, 95.), $m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)})$, $m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)}+f^{(b+2)}p^{(b+2)})$, ec. $m-(m''+f^{(b+1)}p^{(b+1)}+f^{(b+2)}p^{(b+2)}+$ ec. $+f^{(b+c-1)}p^{(b+c-1)})$, e per differenze i numeri p, p', p'', p''', ec. $p^{(b)}, -p^{(b+1)}, -p^{(b+2)}$, ec. $-p^{(b+c)}$. Inoltre per costruzione si ha

$$\frac{p}{k} < -\frac{p'}{k_1} < -\frac{p''}{k_2} < -\frac{p'''}{k_3} < \text{ec.} < -\frac{p^{(b)}}{k_b} < \frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}} < \frac{p^{(b+2)}}{k_{b+2}} < \text{ec.} < \frac{p^{(b+c)}}{k_{b+c}}$$

(n.° 78.) Dunque col porre $y = \mathrm{M}x$, ed $x = \infty$, mentre si fa $\beta = -\frac{p}{k}$ pel metodo della nota al (n.° 69.) deggiono nelle linee (LVIII), (LX) sussistere tutti e solamente i

termini della prima delle linee (LVIII); allorchè ponesi $\beta = -\frac{p'}{k_1}$, sussistono soltanto il termine ultimo della prima, e gli altri tutti della seconda delle linee (LVIII); nel supporre $\beta = -\frac{p''}{k_2}$, rimangono l' ultimo termine della seconda, e tutti quelli della terza delle stesse linee (LVIII); e così in progresso fino inclusivamente alla supposizione di $\beta = -\frac{p^{(b)}}{k_b}$. Quando poi si fa $\beta = \frac{p^{(b+1)}}{k_{b+1}}$, sussistono solamente tutti i termini della prima delle linee (LX) insieme con l' ultimo delle (LVIII); nel supporre $\beta = \frac{p^{(b+2)}}{k_{b+2}}$, rimangono soltanto il termine ultimo della prima delle medesime linee (LX), e i susseguenti della linea seconda, e così di seguito. Di più sotto la stessa supposizione di $x = \infty$, a cagione de' valori de' loro esponenti, è facile a vedersi, che scompariscono sempre rapporto ai termini, che abbiamo accennato, dovere successivamente sussistere, scompariscono, dissi, 1.° tutti i termini, che abbiamo interposti, e che abbiamo espressi per $G^{(i)} x^{m-t^{(i)}} y_1^{i}$, $G^{(i')} x^{m-t^{(i')}} y_1^{i'}$, ec.; 2.° tutti i termini, che pongonsi infine dei (LVIII), (LX), cioè i termini $A^{(n+1)} x^{m-(n+1)} y^{n+1}$, ec. $a^{(m)} y^m$; 3.° tutti i termini, che in ciascuna delle linee della Equazione richiesta, e stabilita come di sopra contengono le podestà della x successivamente inferiori alla potenza del termine primo corrispondente. In conseguenza di tutto ciò venendo pertanto a formarsi successivamente le Equazioni (LIX), (LXI), le quali soddisfanno alle prime due precedenti condizioni, e alla condizione terza soddisfacendo l' attuale supposizione, che $Gx^{m-m'}$ sia il primo dei termini (LVIII), e la supposizione, che il coeffi-

cente $A^{(n)}$ sia diverso dallo zero; concluderemo, che i metodi indicati nei cit.^{i} (n.^{i} 92, ec. 95.) sciolgono realmente i Problemi ivi proposti.

Che se abbia luogo il caso dei (2.°, 3.° n.° 96.), cioè se si abbia $p^{(b+1)} = p^{(b+2)} = p^{(b+3)} = \text{ec.} = p^{(b+c)} = 0$; allora dal (3.°. n.° 96.) apparisce il perchè i rispettivi valori di M non si possono ottenere che da una sola Equazione, cioè da quella, che risulta, sommando insieme tutti i termini (LXI), e dal (2.° n.° 96.) vedesi il perchè gli esponenti della x ivi citati divengono tutti $= m - m''$.

2.° Nella soluzione dei Problemi de' (n.^{i} 92, 94, 95.) si è preso per a il suo valor minimo. Potevamo bensì attribuire allo steso a uno de' suoi valori più grandi; ma inallora l'ultimo dei termini (LVIII) (n.° 92.), e l' ultimo dei corrispondenti nei (n.^{i} 94, 95.) non sarebbe $A^{(n)} x^{m-n} y_1^{n}$, e le Curve domandate potrebbero contenere altri rami oltre i proposti.

98. Domandasi di determinare la Equazione generale di quelle Curve, le quali, oltre i rami sì iperbolici, che parabolici relativi alla stessa $y = L'x$, che si sono indicati nel (n.° 95.) contengono eziandio altri $2f_1 + 2f'_1 + 2f''_1 + \text{ec.} + 2f_1^{(b')}$ rami iperbolici ed altri $2f_1^{(b'+2)} + 2f_1^{(b'+2)} + \text{ec.} + 2f_1^{(b'+c')}$ rami parabolici riferiti nella medesima maniera alla retta $y = L''x$, sono fornite di altri $2f_2 + 2f'_2 + 2f''_2 + \text{ec.} + 2f_2^{(b'')}$ rami iperbolici, e di altri $2f_2^{(b''+1)} + 2f_2^{(b''+2)} + \text{ec.} + 2f_2^{(b''+c'')}$ rami parabolici corrispondenti alla $y = L'''x$; e così in progresso fino a contenere $2f_\rho + 2f'_\rho + 2f''_\rho + \text{ec.} + 2f_\rho^{(b^\rho)}$ rami iperbolici, e

$2f_\rho^{(b^\rho+1)}+2f_\rho^{(b^\rho+2)}+\text{ec.}+2f_\rho^{(b^\rho+c^\rho)}$ parabolici relativi alla medesima $y=L^{(\rho+1)}x$.

Operando come nel (n.° 95.), determino da prima l' Equazione generale di quelle Curve, che contengono i $2f+2f'+2f''+\text{ec.},+2f^{(b)}$, $2f^{(b+1)}+2f^{(b+2)}+\text{ec.}+2f^{(b+c)}$ rami relativi alla $y=L'x$, considerando in essa i coefficienti, che vi esistono indeterminati. Ritrovo in seguito con simil metodo (n.° 95.) solamente tutti i primi termini a sinistra di quella Equazione, che esprimer dovrebbe le Curve dotate degli altri $2f_1+2f'_1+2f''_1+\text{ec.}2f_1^{(b')}$ $2f_1^{(b'+1)}$, $2f_1^{(b'+2)}+\text{ec.}+f_1^{(b'+c')}$ rami corrispondenti alla $y=L''x$. In eguale maniera determino poscia tutti i primi termini soltanto di quella Equazione, che dovrebbe rappresentare le Curve aventi corrispondentemente alla $y=L'''x$ i sovraesposti $2f_2+2f'_2+2f''_2+\text{ec.}+2f_2^{(b'')}$, $2f_2^{(b''+1)}+2f_2^{(b''+2)}+\text{ec.}+2f_2^{(b''+c'')}$ rami; e così proseguo fino alla determinazione dei primi soli termini di quella Equazione, che dovrebbe somministrar quelle Curve, le quali contengono relativi alla $y=L^{(\rho+1)}x$ gl' indicati $2f_\rho+2f'_\rho+2f''_\rho+\text{ec.}+2f_\rho^{(b^\rho)}$, $2f_\rho^{(b^\rho+1)}+2f_\rho^{(b^\rho+2)}+\text{ec.}+2f_\rho^{(b^\rho+c^\rho)}$ rami. Nell' eseguire queste operazioni, per maggiore chiarezza e distinzione, suppongo successivamente $y=L'x+y_1$ (n.° 2. ec.), $y=L''x+y'_1$, $y=L'''x+y''_1$, ec. $y=L^{(\rho+1)}x+y_1^{(\rho)}$, e suppongo con la $\phi(x, y_1)=0$ rappresentarsi l' Equazione, che è risultata a principio, quella cioè, che esprime con le x, y_1, le Curve, le quali sono dotate dei rami, che si sono

supposti corrispondenti alla $y = L'x$, Equazione, nella quale supporrò la potenza y_1^m con il coefficiente 1, perchè se lo avesse diverso, potrò sempre dividere per esso tutta l'Equazione. Ciò fatto, poichè si ha $L'x + y_1 = L''x + y'_1 = L'''x + y''_1 =$ ec. $= L^{(\rho+1)}x + y_1^{(\rho)}$, e però $y_1 = (L'' - L')x + y'_1 = (L''' - L')x + y''_1 =$ ec. $= (L^{(\rho+1)} - L')x + y_1^{(\rho)}$, colloco nella $\varphi(x, y_1) = 0$ in luogo della y_1 successivamente i valori $(L'' - L')x + y'_1$, $(L''' + L')x - y''_1$, ec. $(L^{(\rho+1)} - L')x + y_1^{(\rho)}$, e denomino $\varphi'(x, y'_1) = 0$, $\varphi''(x, y''_1) = 0$, ec. $\varphi^{(\rho)}(x, y_1^{(\rho)}) = 0$ le sucessive Equazioni, che ne risultano. I primi termini a sinistra di queste è facile a vedersi, che, se fossero rispettivamente quelli, che sonosi determinati di sopra; e se i coefficienti loro facessero verificare le corrispondenti Equazioni in M simili alle (LIX) (2.° n.° 93.), (LXI) (1.° n.° 96.); allora il Problema sarebbe risolto. Dunque acciocchè questo succeda, uguaglio allo zero nelle stesse $\varphi'(x, y'_1) = 0$, $\varphi''(x, y''_1) = 0$, ec. $\varphi^{(\rho)}(x, y_1^{(\rho)}) = 0$ il coefficiente di ciascuno dei termini, che precedono gli accennati primi a sinistra; formo con i coefficienti delle stesse $\varphi(x, y_1) = 0$, $\varphi'(x, y'_1) = 0$, ec. le dovute Equazioni in M (LIX), (LXI); e ottenute così tante Equazioni, determino col loro mezzo altrettanti dei coefficienti della $\varphi(x, y_1) = 0$; ne sostituisco i valori nella stessa $\varphi(x, y_1) = 0$; chiamo $\psi(x, y_1) = 0$ l'Equazione, che ne deriva, e collocato quivi $y - L'x$ in luogo della y_1, l'Equazione, che ne nasce, e che dirò $f(x, y) = 0$, sarà evidentemente la domandata.

Onde risolvere questo Problema con tutta la generalità, si osservi, che l'esponente m si lascia come nei (n.[i] 92, 94, 95.)

indeterminato. Il (n.° 89.) però c' insegnerà quale ne sia il valor minimo.

Vogliasi per esempio trovare l' Equazione di quelle Curve, le quali sono dotate relativamente alla $y=L'x$ di due rami della specie $v'=M_1 x^{-1}$, e di due della specie $v'=M_2 x^{\frac{1}{2}}$; rapporto alla $y=L''x$ godono di due rami della specie $v''=M_3 x^{-1}$; e di altri due della specie $v'''=M_4 x^{-1}$ relativamente alla $y=L'''x$; e per semplicità maggiore vogliasi l' Equazione del grado minimo.

Avendosi in quest' esempio (2.° n.° 89.) $a_1=3$, $a_2=2$, $a_3=2$, $n'+n''+n'''=5$, dirò tostamente, che il grado minimo richiesto è il 5.°; e giacchè abbiamo $a_1=3$; corrispondentemente alla $y=L'x$ pei (n.^{i} 92, 94, 95.) troveremo, che la precedente $\phi(x, y_1)=0$, diviene nel caso presente

$$(Gx^2+Ix+N)+(G'x^3+I'x^2+N'x+P')y_1+(G''x^2+I''x+N'')y_1^2+(G'''x^2+I'''x+N''')y_1^3+(G^{iv}x+I^{iv})y_1^4+y_1^5=0, \quad \text{(LXII)}$$

e per essere $a_2=2$, $a_3=2$, i primi termini a sinistra riguardo alla $y=L''x$ saranno i G_1x^3, $G'_1x^4y'_1$, $G''_1x^3y'^2_1$, ec., e riguardo alla $y=L'''x$ i G_2x^3, $G'_2x^4y''_1$, $G''_2x^3y''^2_1$, ec. Supposto ora per semplicità di scrivere $L''-L'=\alpha_1$, $L'''-L'=\alpha_2$, e però $y_1=\alpha_1x+y'_1=\alpha_2x+y''_1$, si collochi nella (LXII) $\alpha_1x+y'_1$ in vece della y_1; avremo quindi l' Equazione

$$\left.\begin{array}{l}
(\alpha_1^5 + G^{v}\alpha_1^4 + G'''\alpha_1^3)x^5 + (I^{v}\alpha_1^4 + I'''\alpha_1^3 + G''\alpha_1^2 + G'\alpha_1)x^4 \\
\qquad + (N'''\alpha_1 + I''\alpha_1^2 + I'\alpha_1)x^3 + (N''\alpha_1^2 + N'\alpha_1 + G)x^2 + (P'\alpha_1 + I)x + N + \\
\big((5\alpha_1^4 + 4G^{v}\alpha_1^3 + 3G'''\alpha_1^2)x^4 + (4I^{v}\alpha_1^3 + 3I'''\alpha_1^2 + 2G''\alpha_1 + G')x^3 + \\
\qquad\qquad I'''\alpha_1^2 + 2I''\alpha_1 + I')x^2 + (2N''\alpha_1 + N')x + P'\big)y'_1 + \\
\big((10\alpha_1 + 6G^{v}\alpha_1 + 3G''\alpha_1)x^3 + (6I^{v}\alpha_1^2 + 3I'''\alpha_1 + G''\big)x^2 + \\
\qquad (3N'''\alpha_1 + I'')x + N''\big(y'^2_1 + \\
\big((10\alpha_1^2 + 4G^{v}\alpha_1 + G''')x^2 + (4I^{v}\alpha_1 + I''')x + N'''\big)y'^3_1 + \\
\big((5\alpha_1 + G^{v})x + I^{v}\big)y'^4_1 + \\
\qquad y'^5_1
\end{array}\right\} = 0$$

corrispondente alla $\phi'(x, y'_1) = 0$, e collocato $a_2 x + y''_1$ in vece della y_1, un' altra Equazione si otterrà corrispondente alla $\phi''(x, y''_1) = 0$ perfettamente simile alla (LXIII), cambiandosi semplicemente le a_1, y'_1 nelle a_2, y''_1. Ma i primi termini alla sinistra attualmente esistenti nella $\phi''(x, y'_1) = 0$ deggiono essere della forma $G_1 x^3$, $G'_1 x^4 y'_1$, $G''_1 x^3 y'^2_1$, ec.

Dunque nella (LXIII) dovrà aversi

$$\alpha_1^5 + G^{v}\alpha_1^4 + G'''\alpha_1^3 = 0,\ I^{v}\alpha_1^4 + I'''\alpha_1^3 + G''\alpha_1^2 + G'\alpha_1 = 0;$$

e così dall' altra Equazione simile alla (LXIII) e corrispondente alla $\phi''(x, y''_1) = 0$, otterremo le altre due Equazioni

$$\alpha_2^5 + G^{v}\alpha_2^4 + G'''\alpha_2^3 = 0,\ I^{v}\alpha_2^4 + I'''\alpha_2^3 + G''\alpha_2^2 + G'\alpha_2 = 0.$$

Riguardo finalmente ai coefficienti M_1, M_2, ec. delle Equa-

zioni delle parabole ed iperbole supposte si avranno pei (2.° n.° 93. 1.° n.° 96.) le Equazioni

$$G + G'M_1 = o, \quad G' + G'''M_2^2 = o.$$

$$(N'''\alpha_1^3 + I''\alpha_1^2 + I'\alpha_1) + (5\alpha_1^4 + 4G^{v}\alpha_1^3 + 3G'''\alpha_1^2) M_3 = o, \qquad \text{(LXVI)}$$

$$(N'''\alpha_2^3 + I''\alpha_2^2 + I'\alpha_2) + (5\alpha_2^4 + 4G^{v}\alpha_2^3 + 3G'''\alpha_2^2) M_4 = o.$$

Col mezzo delle ottenute Equazioni (LXIV), (LXV), (LXVI), dove le quantità $\alpha_1 = L'' - L'$, $\alpha_2 = L''' - L'$, M'_1, M_2, M_3, M_4 si suppongono note, determino i coefficienti G, G', ec., I', I'', ec., ec. che vi si contengono, sostituisco i valori loro così determinati nella (LXII); e posto in fine in essa $y - L'x$ in vece di y_1, risulterà l'Equazione richiesta, quella cioè di 5.° grado, la qual rappresenta le Curve, che sono dotate dei rami supposti.

99. 1.° Nella determinazione ora accennata dei coefficienti della $\phi(x, y_1) = o$ vedesi non essere necessario, che di risolvere tante Equazioni tutte di primo grado.

2.° Può accadere, che il numero dei coefficienti sia maggiore, uguale, o minore del numero delle Equazioni corrispondenti; se ne sia maggiore, od uguale, allora il Problema potrà essere solubile; ma se il numero dei coefficienti sia minore del numero delle Equazioni; allora il Problema potrà non essere capace di soluzione. Nell'esempio addotto essendo dieci i coefficienti contenuti nelle (LXIV), (LXV), (LXVI), ed otto il numero di queste Equazioni; il Problema ammetterà soluzione.

3.° Ancora nel precedente Problema (n.° 98.) avrà luogo quanto si è detto nel (3.° n.° 97.).

4.° Per sostituire attualmente $\alpha_1 x + y'_1$ nella $\phi(x, y_1) = o$ in luogo della y_1, potremo per agevolare l' operazione pra-

pratica, far uso del metodo seguente, il quale, quantunque generale, pure non applicheremo per brevità, che al caso del precedente esempio. Si raccolgano primieramente nella (LXII) tutti i termini, ne' quali le x, y_1 sono alla massima dimensione, nel caso nostro alla 5.^{a}, e tolta da essi la x, si scrivano ordinati per la y_1 in una linea (LXVII), formandone come un' Equazione; raccolti in seguito tutti quei termini, ne' quali le x, y_1 sono ad una dimensione di meno, nel nostro esempio alla 4.^{a}, si pongano nello stesso modo uguagliati allo zero, e toltane la x, nella linea (LXVIII). Così si scrivano nella (LXIX), levatane la x, tutti i termini, i quali nella (LXII) contengono le x, y_1 a due dimensioni di meno della massima, nel caso nostro alla 3.^{a}, e così di seguito. Ciò fatto, si sostituisca nelle Equazioni (LXVII), (LXVIII), (LXIX), ec. in luogo della y_1 la quantità $\alpha + \frac{1}{x}$, il che potremo eseguire assai facilmente, e sollecitamente con i metodi già noti dalla Teorica delle Equazioni (*Ruffini Teoria generale delle Equazioni n.° 80.*, *Soc.^{a} Ital.^{a} Vol. XVI. Mem. intorno ad un nuovo metodo di estrarre le radici numeriche n.°* 10.); e scritti i risultati che ne vengono sotto ciascuna delle Equazioni (LXVI), (LXVII), ec., si sommino insieme, come si osserva in (LXIII), primieramente tutti quelli tra i risultati, i quali occupano le prime linee; poscia si uniscano quelli delle linee seconde, e la somma loro si moltiplichi per y'_1; fatto in seguito l' aggregato dei risultati delle terze linee, si moltiplichi esso per y'^2_1; e così in progresso. Uguagliata infine allo zero la somma totale delle quantità, le quali per tal modo sonosi determinate, e cambiata nel caso nostro la α nelle α_1, α_2, avremo così le trasformate richieste

$$y_1^5+G^{\prime v}y_1^4+G'''y_1^3=0 \qquad \text{(LXVII)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\ a^5+G^{\prime v}a^4+G'''a^3)\,x^5+\\
(\ 5a^4+4G^{\prime v}a^3+3G'''a^2)\,x^4+\\
(10a^3+6G^{\prime v}a^2+3G'''a)\,x^3+\\
(10a^2+4G^{\prime v}a+G''')\,x^2+\\
(\ 5a+G^{\prime v})\,x+\\
1
\end{array}\right\}=0$$

$$I^{\prime v}y_1^4+I'''y_1^3+G''y_1^2+G'y_1=0 \qquad \text{(LXVIII)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\ I^{\prime v}a^4+I'''a^3+G''a^2+G'a)\,x^4+\\
(4I^{\prime v}a^3+3I'''a^2+2G''a+G')\,x^3+\\
(6I^{\prime v}a^2+3I'''a+G'')\,x^2+\\
(4I^{\prime v}a+I''')\,x+\\
I^{\prime v}
\end{array}\right\}=0$$

$$N'''y_1^3+I''y_1^2+I'y_1=0 \qquad \text{(LXIX)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\ N'''a^3+I''a^2+I'a)\,x^3+\\
(\ 3N'''a^2+2I''a+I')\,x^2+\\
(\ 3N'''a+I'')\,x+\\
N'''
\end{array}\right\}=0$$

$$N''y_1^2+N'y_1+G=0$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\ N''a^2+N'a+G)\,x^2+\\
(2N''a+N')\,x+\\
N''
\end{array}\right\}=0$$

$$P'y_1+I=0$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\ P'a+I)\,x+\\
P'
\end{array}\right\}=0$$

N

100. Corrispondentemente alle successive rette $y=L'x$, $y=L''x$, ec. (n.° 98.) supponghiamo, che si verifichino le ipotesi fatte nel (2.° n.° 96.), cosicchè si abbia $p^{(b+1)}=0$, $p^{(b+2)}=0$, ec. $p^{(b+c)}=0$; $p^{(b'+1)}=0$, $p^{(b'+2)}=0$, ec. $p^{(b'+c')}=0$, ec. e posto $b+c=r$, $b'+c'=r'$, ec. vogliasi, che le Curve richieste siano fornite in primo luogo relativamente alla $y=L'x$ di $2f+2f'+2f''+$ec.$+2f^{(b)}$ rami iperbolici, e di $2f^{(r+1)}+2f^{(r+2)}+2f^{(r+3)}+$ec.$+2f^{(r+5)}$ parabolici (2.° n.° 96.); corrispondentemente alla $y=L''_{1}x$ di $2f_{1}+2f'_{1}+2f''_{1}+$ec.$+2f_{1}^{(b')}$ rami iperbolici, e di $2f_{1}^{(r'+1)}+2f_{1}^{(r'+2)}+$ec.$+2f_{1}^{(r'+s')}$ parabolici, ec.; e ritenute le supposizioni del (5.° n.° 83.), vogliasi inoltre, che le Curve suddette debbano relativamente all' assintoto $y=L'x+M'$ contenere $2g^{(b+1)}+2g^{(b+2)}+$ec.$+2g^{(b+c)}$ rami iperbolici simili a quelli del (n.° 82.); altri ne debbano contenere relativamente agli assintoti $y=L'x+M''$, $y=L'x+M'''$, ec. come nel (4.° n.° 83.); altri parimenti simili corrispondentemente agli assintoti $y=L''x+M'_{1}$, $y=L''x+M''_{1}$, ec., e così di seguito.

Per isciogliere questo Problema, determino primieramente, come nel (n.° 98.) l'Equazione tra le x, y_{1} esprimente le Curve, che sono dotate dei primi fra gli esposti rami assintotici, e che denomino quì ancora $\psi\ (x,\ y_{1})=0$, osservando in ciò fare, che il grado minimo di tale Equazione dipende nel caso presente dal (n.° 91.), e che per essere $p^{(b+1)}=0$, $p^{(b+2)}=0$, ec. deggiono aversi le riflessioni dei (2.°, 3.° n.° 96.). Suppongo quindi $y_{1}=M'+y_{2}=M''+y'_{2}=M'''+y''_{2}=$ ec. $=M'_{1}+y_{2}^{(\varepsilon)}=M''_{1}+y_{2}^{(\varepsilon+1)}=$ec.$=$ec. e chiamo $\psi'\ (x,\ y_{2})=0$, $\psi''\ (x,\ y'_{2})=0$, $\psi'''\ (x,\ y''_{2})=0$, ec. $\psi'_{1}\ (x,\ y_{2}^{(\varepsilon)})=0$,

$\psi''_1\,(x\,,\,y_2^{(\varepsilon)})=0$, ec., ec. le Equazioni, che per le successive sostituzioni nella $\psi\,(x\,,\,y_1)=0$ si ottengono.

Ciò fatto cerco i primi termini di quella Equazione, la quale rappresenta le Curve, che relativamente all' assintoto $y=L'x+M'$ contengono i $2g^{(b+1)}+2g^{(b+2)}+2g^{(b+3)}+\text{ec.}+2g^{(b+c)}$ ossia, posto per semplicità $g^{(b+1)}=\gamma$, $g^{(b+2)}=\gamma'$, $g^{(b+3)}=\gamma''$, ec. $g^{(b+c)}=\gamma^{(c-1)}$, i $2\gamma+2\gamma'+2\gamma''+\text{ec.}+2\gamma^{(c-1)}$ rami iperbolici voluti dal Problema, e che suppongo avvicinarsi alle iperbole del (n.° 82.) A questo fine preso, come nel (n.° 91.), il valor minimo di α, od uno degli altri a questo maggiore, avendo però in questo secondo caso la riflessione esposta nei (2.° n.° 97, 3.° n.° 99.), faccio nel citato (n.° 82.) $h+\mu+\alpha=m_1$, formo poscia per lo stesso (n.° 82.) come nel (n.° 92.) le serie

$e=0$, $e'=k'$, $e''=2k'$, $e'''=3k'$, ec. $e^{(\gamma)}=\gamma k'$,

m_1, m_1-q, m_1-2q, m_1-3q, ec. $m_1-\gamma q$;

$e^{(\gamma)}=\gamma k'$, $e^{(\gamma+1)}=\gamma k'+k'_1$, $e^{(\gamma+2)}=\gamma k'+2k'_1$, ec. $e^{(\gamma+\gamma')}=\gamma k'+\gamma' k'_1$,

$m_1-\gamma q$, $m_1-\gamma q-q'$, $m_1-\gamma q-2q'$, ec. $m_1-\gamma q-\gamma' q'$;

ec.

e siccome queste risultano perfettamente simili alle (LVII), proseguo lo stesso calcolo del citato (n.° 92.), e si otterranno in tal modo gl' indicati primi termini. Cerco ed ottengo nella medesima guisa i termini primi di ciascuna di quelle Equazioni, le quali rappresentano le Curve, che corrispondentemente agli assintoti $y=L'x+M''$, $y=L'x+M'''$ ec. $y=L''x+M'_1$, $y=L''x+M''_1$, ec. ec. sono fornite dei rami iperbolici, che abbiam detto volersi essi pur dal Problema. Dopo tutto questo, seguitando ad operare come nel citato (n.° 98.), uguaglio allo zero nelle $\psi'\,(x\,,y_2)=0$, $\psi''\,(x\,,y'_2)=0$,

$\psi'''(x, y''_2)=0$, ec. $\psi'_1(x, y_2^{(\varepsilon)})=0$, $\psi''_1(x, y_2^{(\varepsilon+1)})=0$, ec. i coefficienti di tutti quei termini, che precedono quelli, che si è supposto ora di ritrovare siccome primi; dalle uguaglianze, che quindi risultano, determino altrettanti coefficienti della $\psi(x, y_1)=0$, li sostituisco in essa, e posto finalmente y—L$'x$ invece della y_1, vedesi, che si otterrà nella Equazione $f(x, y)=0$, (n.° 98.), che finalmente ne deriva, la domandata. Potrà ognuno da se medesimo proporsene degli esempi.

L' EQUILIBRIO DE' CIELI

CONFORMATI A FOGGIA DI MEZZABOTTE
O DI CULLA
E SOLITI USARSI
NELLA COSTRUZIONE DEI PONTI GALLERIE
DELLE LOGGIE DELLE NAVATE O CELLE
DEI TEMPLI E DELLE BASILICHE

Discorso di Pietro Ferroni

Ricevuto il dì 5. Gennajo 1818.

Innanzi assai che i principj teorici della Statica esposti, e dimostrati si fossero dai Matematici, non mancarono d'elevarsi Portici insigni, non *architravati* come i più antichi, ma *arcati*, ed eziandio Volte o Cieli di varia specie dall' arditezza degli Architetti. Presero questi per avventura il modello, come di molte altre Arti più manuali e più ovvie, dai lavori degli Animali, che per naturale istinto si scavano in tondo più o meno rozzi i Cieli delle lor tane, e dei loro nidi; in conferma di che dovettero aver presto sott' occhio l' esperimento facile del mezzuovo posato sulla sua base, e della mezza scorza comunque sottile del fusto d' un Albero segata pe 'l lungo, e messa a giacere col concavo per di sotto, che son valevoli a reggere, soprapposti al colmo o alla schiena loro, considerevoli, e qualche volta incredibili pesi. Non furono già le Dottrine astruse d' Archimede, che sotto l' Imperio d' Augusto guidassero gli Edificatori del Panteone, nè a' tempi di Giustiniano quei della Cupola di S.ª Sofia; nè i Saraceni, nè i Goti durante l' Età volgarmente chiamata de' Barbari sino dal DXLI. in Italia, nè poscia i Teutoni andaron dietro alle Leggi dell' Equilibrio quand'

eressero, i primi specialmente in Granata, in Toledo, in Siviglia, gli altri a Strasburgo, a Rheims, ad Anversa, ad Yorck, a Londra, a Westminster, a Vienna d' Austria, a Ravenna, a Chiaravalle, a Monza, a Pavia quei grandissimi traforati Edifizj, anche senza le *stringhe*, biasimate a ragion dal Vignola, sostenuti sui fianchi, Edificj di gusto orientale, che per lo più mal si dicono Gotici, e maraviglian tuttora, perchè appariscono come in aria sospesi, e retti solo mercè della loro sveltezza, ma quantunque alla vista leggieri sono in sostanza saldissimi. Risorte le Lettere, e tornato ad un tempo stesso il buon gusto delle Belle-Arti, ricavatosi dallo studio degli avanzi dei Monumenti antichi della Grecia e di Roma, non fu tampoco l' intima conoscenza del contrabbilanciarsi delle forze e delle resistenze de' cunei componenti gli Archi, e dei lor Piè-diritti o sostegni, che suggerisse nel Secolo XIV. (MCCCLV), la straordinariamente magnifica Loggia de' Priori all' Orcagna, o al Brunelleschi e Ghiberti la Cupola di S.[a] Maria del Fiore, arditissima sovr' ogni altra, e ciò ch' è di maggior maraviglia, lavorata di giro in giro senza centina od armatura; nè l' Ammannati in Secol più colto, cioè nel MDLX. o in quel torno, si propose a mio credere o ebbe tutt' agio di trar partito dagli Elementi della Meccanica per ideare ed erger poscia sull' Arno dentro Firenze il bel Ponte della SS. Trinità, meritamente estimato in virtù della sua nuova forma e vaghezza dagli intelligenti amatori dello stile purgato in sì fatti particolari d' Opere pubbliche e suntuose. Egli è però vero che sebbene il Brunelleschi, e dopo di lui Michelangiolo, che immaginò la Cupola Vaticana, non sapessero che la *sacca* della Curva *catenaria* o più o meno tesa o più o meno nei suoi punti gravata rappresentasse sempre per eccellenza l' andamento della figura di tutti i Cieli ben bilanciati nelle lor parti, perchè il primo a guardarla dal solo lato geometrico fu quindi il Linceo Fiorentino, come il primo a cavarne profitto, e predicarla dicevole all' effetto d' impostare le Volte,

dopo di Giacomo Bernoulli, che la propose, par certo che fosse lo Scozzese David Gregory nel MDCXCVII., nulladimeno quei quattro prestantissimi Artisti Toscani, dei quali ho testè dato cenno, o fosse impulso della sagacità lor naturale, o fosse frutto tenuto segreto di qualche loro speciale esperienza, o il caso sol lo portasse, s'avvicinaron moltissimo a quella Linea nel profilo delle precitate Rotonde, e del Ponte sunnominato; diversi in ciò dall'Orcagna, il quale veduta in patria la Chiesa antica dei SS. Apostoli, che Carlo Magno fondò circa all'anno DCCCV., nella fabbrica della Loggia della Signoria, e del Portico e ricco Tabernacolo d'Orsanmichele, unicamente pago di restituire nel Secolo XIV.° all'Architettura (esclusi i Gotici come avean già adoperato prima di lui il Cambio o Lapo, Arnolfo, ed alcuni degli anteriori Artisti Greci e Pisani in Italia) gli Archi semicircolari o Romani allor disusati, fuorchè nell'Ordin Toscano, o Rustico che dir si debba, delle Porte Urbane, ed altri Edificj Pretorj, Fortilizj e Castelli di simil fatta, praticò nel restante degli ornamenti una graziosa mischianza del gentil modo e del grave, insomma del Greco, del Latino, del Gotico, e del Moresco. E più del Brunelleschi alla *Catenaria*, senza conoscerla, e forse immaginata altra Centina, s'accostò il Buonarroti: perocchè questi segnò talmente, e svelti i nervi, gli ossami, le coste della carcassa, ossiano i costoloni della sua Cupola, che nel sodo di essa a sentimento del Poleni vi si riscontra quasi compresa, mentre quegli all'opposto seguitando presso a poco l'alzata della Curva *Oviforme* la temperò quinci col sestacuto (*en tiers point*, quarto acuto, come lo appella il Vasari, inversione Tedesca ricavata dal tetto o fastigio delle Case Alemanne *a capanna* in misura di triangolo equilatero), ed accortosi della debolezza nei fianchi l'aggravò perchè non s'aprisse spingendo al didentro, col contrappeso del Cupolino o della Lanterna, molto più ampia e ponderosa di quelle dei Greci e Pisani Artefici dopo del M. a S. Marco di Venezia, a S. Antonio, e S. Giustina di Pa-

dova, e di cui l'Antichità non ha esempio, poichè aperto in cima il Cielo del Panteone, già Tempio di Giove Ultore, chiuse affatto l'altre Rotonde, ed al più sormontate da un fiore, da una pina, da un globo da un'urna, da una piramide o guglia od altrettale ornamento, come i Templi diastili d'Apollo e di Diana, i Sepolcri d'Adriano e di Teodorico, i Duomi di Pisa e di Siena, il S. Giovanni di Monza; Lanterna, che non osò Bramante imitare nè a Città-di-Castello nel Duomo, nè a S. Pietro in Montorio dei PP. Riformati di Roma, e solamente imitata dipoi, ma in circostanze diverse, e forse fuor di proposito da Michelangiolo, se pur avesse abusato, come parecchi tra i moderni Architetti, della *Catenaria semplice* surrogandola alla *composta*. L'Ammannati, che avea bisogno pe 'l nuovo Ponte d'una *Catenaria* non tanto svelta, ed anzi piuttosto assai *scema*, e sdrajata verso il suo colmo; disegnò *Parabolica* incirca la centina, capovoltando il vertice di ciascheduna delle due metà, e posandole a squadra sulle impostature a fin di sveltire, e render più aperti i fianchi, e troncando le due compagne mezzecentine con ottusissimo sestacuto bastardo allo sfogo o rigoglio. Aveva egli forse nel corso dei giovanili suoi studj potuto qualche fiata osservare che attaccatasi lenta una corda o catena pe' suoi estremi a due punti, più corta ch' ess' era, e men che faceva *sacca*, più sembianza tenea d'un segmento di *Parabola* Apolloniana; lo che non molto dipoi a vantaggio della Balistica sperimentò Galileo, il quale ben cauto (e l' ho notato in altr' Opera) non la disse mai coincidente, siccome non scrisse tampoco che un Arco di Cerchio fosse assolutamente la Linea *oligocrona* o *brachistocrona*.

Eranvi dunque, per così dire, latenti nella mente dei bravi Artisti, ed in particolar modo Italiani (tra i quali Bramante nel misto di Greco e di Gotico della Certosa di Pavia, Giulio Romano e Jacomo Barozzi da Vignola in S. Petronio di Bologna, Pellegrini e Bassi nella Facciata del Duomo di Milano, Tempio che par miracol dell' Arte, cominciato nel

MCCCLXXXVI. sotto il Governo del Duca Gian Galeazzo Visconti, e l'ultimo nella Chiesa di S. Lorenzo) i semi della Dottrina del mutuo equilibrio concernenti il congegnamento e la disposizione di più parti staccate, onde comporne o questo o quel Cielo, a mezzabotte, a schifo, a crociera, a vela, a emisfero, e ben dovevano sentire che tanto il concavo quanto il convesso degli Archi andavan soggetti alla medesima legge. Sì fatto equilibrio bisognava in prima considerarlo fuori del caso di collegare i pezzi distinti, che formavano il Cielo, con cemento, con perni, o spranghe di ferro o di rame impiombate; perchè allora avrebbe voluto dire lo stesso che caricare i Piè-diritti d' un pezzo solo più o meno incavato a scodella in guisa della rammentata Rotonda del Re Teodorico presso al littorale di Classe. Così costumarono in antico i Romani, a pari dei muri di smalto gettati dentro casse amovibili, di fabbricar di getto sulle lor forme in convesso, preparate di correnti, di tavole, di stoje o cannici, le Volte dei Bagni, delle Cloache massime, delle Conserve delle fontane, de'Sotterranei, e dei Sepolcri e Tempietti de' Penati o dei Lari: le quali Volte (replicate oggigiorno nei Casini di delizia, nei *Coffèe-houses*, nelle Pergole, e nelle piccole Specule (*speculatoria*) o Vedette dei Parchi, Giardini, e Pometi moderni) o per le commessure de' pezzi tenute ferme ed a stretta in forza di quelle leghe metalliche, o per convertirsi dopo d' aver fatto presa il cemento in un sol pezzo di smalto, simigliante in sostanza a un massello di natural breccia comunque enorme, ed in qualunque concavità figurato, gravitavano a piombo senza scomporsi, e perciò senza spingere lateralmente (laddove a differenza degli Architravi sempre spingono gli Archi), su i Muri, Pilastri, o Colonne rendute valevoli a sostenerle. Spogliata la considerazione dell' equilibrio di questi estranj soccorsi, impraticabili nelle grandissime Volte, o dato ancora che fossero praticabili, incerti sempre nel loro favorevol successo, restava sol luogo a generalizzare la *Catenaria*, la qua-

le (a malgrado d' esser le rette e le porzioni de' circoli le sole linee adoprate in tutti i membri o modini d' Architettura, e persino nel disegnar le Volute, onde dar loro garbo, grazia, e semplicità secondo le regole di Palladio, di Jones, e d' altri valentuomini, che studiaron l' Antico, e più sensati non si lasciarono illudere da Francesco Borromini, da Ferdinando Fuga, e da corruttori consimili del bello stile) era l'unico semplicissimo Tipo datoci dalla Natura affine d' avere i Cieli, che nel supposto della costante Gravità Terrestre si reggessero senz' altro sussidio di per se stessi, anche caricati in sul dorso di rinfianchi, di pedate, di lastrichi, e del rimanente corredo di siffatti Edifizj. Apparisce dai MSS. inediti del Torricelli che questo Geometra perspicacissimo, sorpreso nel MDCXLIV. dall' improvvisa caduta; mentr'era ancor sulle centine, del Ponte nuovo di Pisa d' un arco solo, disegnato e diretto da Alessandro Bartolotti (in memoria del quale Architetto, ed avvenimento ei compose un elegante, e bizzarro Epigramma tetrastico, ch'esiste in un Codice della Biblioteca Magliabechiana), si rammentasse della speculazione del Galileo suo Maestro per applicare agli Archi de' Ponti in preferimento d' ogni altra Curva la *Catenaria* come Linea di spontaneo equilibrio, chiamata poco dipoi dal Viviani di lui Condiscepolo la *Catenuzza*, quando si pose a penetrarne più addentro l' indole ed il carattere proprio in congiuntura delle mosse e degli squarci notevoli accaduti nelle due Cupole Fiorentina e Romana, l' ultima delle quali, dopo aver fatto lungamente temere la sua rovina, sotto il Pontificato di Benedetto XIV.° fu incatenata da Luigi Vanvitelli, e la prima risicò d' esserlo parimente, regnando il Granduca Cosimo III.°, da Carlo Fontana, e si spese non poco nei preparativi delle catene, per cingerla verso il mezzo della sua altezza ove pareva sfiancarsi, fino alla nostra età conservate qual argomento di non mai spento timore. Ma quel passaggiero divisamento nell' animo del Viviani non giunse a tanto di portarlo a occuparsi della ricerca d' altre innumerevoli *Cate-*

narie diversamente caricate nei rispettivi lor punti, le quali men semplici *Catenarie* veramente più delle prime si confanno alla pratica di costruire Archi e Volte o per un motivo o per l'altro non mai ugualmente aggravate in tutta la loro lunghezza o contorno; di modochè, quantunque egli avesse, come Direttore delle Opere pubbliche del Granducato, un campo larghissimo per coltivare, e quinci ridurre a regole certe questa speciale applicazion della Statica, che all' Arte *Edificatoria* appartiene, ed ha i suoi fondamentali principj nella Macchina *Funicularia*, nientedimeno e nell' *Enimma Geometrico* ch' esso propose l' anno MDCXCI. e nell' atto di disvelarlo l' anno consecutivo mediante il divulgato Libretto, *Formazione e Misura di tutti i Cieli*, si contentò unicamente d'insegnar la maniera di farne al tornio i Modelli, di ben condurne e intrecciarne le corrispondenti ossature, e di palesare la dimensione della superficie di ciaschedun de'VI. Cieli, prossima al vero di IV., esatta de' II. rimanenti, ma la stessa appuntino, che avevano innanzi a lui già trovata Pappo d' Alessandria ove parla delle *Spirali Sferiche*, Gregorio di S. Vincenzo, Robervallio, Pascal, De Angelis, ed altri contemporanei, che scrissero intorno all' *Unghie Cilindriche*, se pure riguardo a questo sino dal MDCXLVI., come afferma, non gli avess' ei prevenuti.

Ora accadutomi non di rado di dover progettare e dirigere per commissione del Principe nuovi Ponti a comodo delle Vie Regie, e Volte aperte od impiantate sotterra a buonificamento di Laghi e Paludi in Toscana, mi sono sempre partito nel delineare le Curve interiori ed esteriori di queste Fabbriche dalla *Catenaria* generalmente considerata, cioè con qualunque distribuzione di carico in sul convesso o di terrapieno o di smalto o di muramento alla rinfusa o di strati e filari di pietre concie o mattoni o finalmente anche d' acqua, trattandosi di Ponti-Canali, e di Botti o Chiaviche sotto gli Alvei de' Fiumi. Intendo dire di quella universal *Catenaria*, che per quant' io sappia ha la stessa data della brevissima

Dissertazione o Memoria inserita nei *Miscellanei* della R. Accademia di Berlino da Gianbatista agnato d' Alessio Clairaut avanti della metà del Secolo scorso, ed intendo eziandio di tener costante la Forza di gravità, e le direzioni sue parallele, come presso a poco addivien sulla Terra, escludendo, perchè inopportuna pei nostri Cieli, qualunquesiasi altra ipotesi e legge di Forze variabili, e tendenti ad uno o più punti o fuochi centrali. All' effetto d' una maggior sicurezza e stabilità ho in prima supposto che le commessure e faccie lavorate delle pietre in mutuo contatto riuscissero talmente liscie che a fin di smuoverle non vi fosse bisogno di vincere nessun attrito, ed ho tolto loro qualunque legame di calce, ferro, od altro, perchè mediante il soffregamento non valutato, e la mancata forza di coesione maggiormente si stesse a vantaggio nella fermezza dell' equilibrio, e nell' integrità della Volta. A tali avvertenze affidai il Ponte eseguito sull' Arbia *alle Taverne* nella Via Lauretana o della Valdichiana Sanese, l' altro del Fiume Pesa nella Strada Romana (sul punto della sua esecuzione da chi n' ebbe l' incarico un pò disformato), quei sustituti ai Ponti antichi di legno nella Via Grossetana, il Ponte di Signa più volte ideato rialzarsi, ed i proposti dipoi per la Strada della Romagna passandosi da Premilcore, per la Strada di Sansepolcro e d' Ancona in Valditevere lungo il Cerfone, per la Strada del Pontassiere seguitando le falde del Monte di Valombrosa sino a Rignano o all' Incisa lungarno a scanso del Poggio di S. Donato o dell' Apparita, e per la Strada di Rifiglio o del Casentino in compimento di quella già fatta sul dorso d' un ramo degli Apennini ossia del Giogo della Connona. Nè dissimile appoggio ebbero i Profili segnati per le Volte sotto la Zambra di Calci, e sotto il Fosso navigabile di Ripafratta onde inoltrare appiè del Monte Pisano o della Verrucola l' acque del Lago di Sesto o di Bientina, e condurle a far capo alla Marina tra le foci dell' Arno e del Serchio; per la Mina sotto la Mucchia nel Cortonese affine d'aprire il passo alle ridondan-

ti acque del Trasimeno dal Borchetto sino a Montecchio; e per la centina della Tromba lunga un Miglio ed un terzo del Traforo o Condotto sotterraneo apertosi dentro del sodo d'una Collina colla mira benefica, e col felice fine ottenutosi di smaltire dopo d'un antiquato abbandono tutte l'acque stagnanti nel Pian del Lago o di Santa Colomba, distante quattro Miglia incirca da Siena, correggervi l'inclemenza dell'aria, e restituirlo all'aratro.

Mi nacque allora il pensiere d'illuminare i Disegnatori di tutte queste Opere arcate, o *Concamerazioni* che debbon esse chiamarsi in vocabolo tecnico, e per far ciò proponevami 1.° di ridurle insieme pe 'l solo riguardo dell' equilibrio ad un caso unico, chiarissimo, e semplicissimo; 2.° di sceverare nell' esame *statico* di quest' unico caso tutto il superfluo dell'apparecchio o geometrico od analitico, che gli Scrittori su tale argomento, e massimamente sino dal MDCCXII. i Francesi Delahire, Parent, Couplet, Belidor, Bossut, ec. con pochi altri Italiani giudicarono proprio di porre in essere non tanto per l'intelligenza della materia, quanto ancora per giugnere a dimostrare con tutto il rigore i Rudimenti di tal Dottrina; 3.° finalmente di ristringere o riconcentrare la Pratica intera di tutti i Cieli, di qualunque condizione, figura, grossezza, corda, rigoglio essi fossero, in una sola Regola *classica*, e quando nell'applicarla alla specialità di questo o quel Cielo o la difficultà intrinseca della Formula o lo stato attual dell' Analisi non comportasse d'utilmente servirsene in atto pratico, di sustituirvi i modi *grafici* per lume e scorta agli Artisti, cui l'approssimazione più giova mentre sia ben diretta, ed ha sempre luogo altresì nel passaggio dall'astratto al concreto, posto ancora che l'Algebra somministrasse espressioni d'assoluto, appurato, ed esattamente calcolabil valore.

Il discorso, che meco stesso io faceva in eseguimento del primo Articolo (talquale ebbi poi agio di comunicarlo ad un dotto Ufficiale del Corpo del Genio, stato allievo del-

la Scuola Politecnica di Parigi, che mi soggiunse alcuni suggerimenti suoi sagacissimi) consisteva sommariamente nel considerare tutte le Volte per quanto s' aspetti al loro equilibrio come se si trattasse d' un Arco solo isolato, e posante sopra due punti fissi. Ed in vero, un Cielo andante a mezzabotte od a culla rovescia (*Voûte en berceau*) o come altri dicono a pergolato, sia sottile a par d' una Volterrana, sia di mediocre grandezza come una Volta reale, o composto di cunei tronchi grandi o grandissimi (*voussoirs*) come nei Ponti, o abbia o non abbia il concavo d' una foggia (*intrados*) e il convesso (*extrados*), cioè 'l suo dorso d' un' altra, e il cui rigoglio, sfogo, od altezza contata dall' impostatura (*coussinet*) sino al di sotto della chiave o serraglio agguagli (*ordinaire*), superi (*surhaussée*), o non aggiunga (*surbaisseé*) la metà della corda o della retta orizzontale frapposte alle sue impostature, ognuno (dico) di questi Cieli è il coacervato o complesso d' Archi scempi, tutti uguali in fra loro, collegati al più per mezzo di qualche morsa a scanso della scioltezza dei materiali, che così addentellati e ammorsati servono a far del totale una massa, un' opera sola senza distinzione o distacco continuo di parti, non altramente che l'ordito e la trama serrandosi insieme, ed accavalciandosi contribuiscono alla formazion della tela. Quello, che ho dianzi asserito di tutto il Cielo *a mezzabotte* sciogliendolo in Archi val parimente dei Cieli composti di quattro delle sue uguali porzioni tra lor combinate, le quali compongono in simetria la Volta *a schifo (scaphiformis)* o *a ciel di carrozza*, e l'altra *a crociera* o *a lunette*, non meno che vale ancora dei Cieli in rotondo ossian Cupole d' ogni maniera *(Voûtes en Dôme)*, *Emisferica*, *Emielbissoidèa*, ec., e delle loro parti simetriche o euritmiche, come la *Volta a vela* ordinaria, e la bizzaria della *Fiorentina*, di cui menossi cotanto rumore per tutta Italia e Oltramonti in sul punto del nascimento dell' Analisi degl' Infiniti. Conciossiachè cominciando dalle *Rotonde* perfette, che sono Solidi di rivoluzione, vuoti al di dentro, e

se assai vaste, una incastrata nell' altra pe 'l maggior garbo alla vista di sotto e di sopra, onde così raddoppiate le Volte, siccom'è della Fiorentina, della Romana, e di quella di San Paolo di Londra, compiuta colla direzione o soprainten-denza di Wren, dian luogo nel vano intermedio alle scale, ai corridoj, e ad altri comodi e accessi interni sino alla cima, io concepia facilmente che Cielo sì fatto era un composto o tessuto dell' Arco generatore ripetuto o moltiplicato a guisa di fascio, di carcassa, o di rosa, che partendosi dal comun apice della Cupola termini a questo o quello degli innumerevoli punti della periferia della base. Quindi è che uno spicchio o mezzo fuso, più o men sottile ch'e' sia, della Volta di questa Cupola, largo quanto la testa d'uno de' tronchi di cunei posata sopra la base, che van digradando con proporzion decrescente sino alla cima, ben equilibrato ch' ei fosse come un Arco di mezza *Catenaria* di pesi disuguali gravata nei differenti punti del suo perimetro, determinerebbe eziandio l' equilibrio dell' intera *Rotonda*. E parimente da un Arco di *Catenaria* consimile dipenderebbe la determinazione dell' equilibrio de' *Costoloni* ossian Archi principali o maestri d' una *Rotonda* imperfetta, la cui Pianta fosse, in cambio d' un Circolo, altra Curva rientrante simetrica, o Poligono regolare o simetrico; perocchè ogni giro od anello di cunei troncati, chiuso ch' e' sia (massimamente se lavorato o posto a stretta con tutta sollecitudine) si bilancia di per se stesso in virtù dell' opposizion delle forze o della sollecitazion contrastata d' ognuna delle sue parti per la discesa, e molto più quando i pezzi, che compongono il *Costolone*, stien saldi e fermi, spicchio per spicchio, dall'imo al sommo mercè, della *Catenaria* soprindicata. Siccome poi la Statica insegna (ed è ciò altronde evidente di sua natura) che anco una porzione o segmento qualunque siasi di *Catenaria* o diritta o rovescia sta in equilibrio a par dell' intera, ne consegue che i Cieli, o sien parte d' un Cielo solo o più parti di più Cieli tenute a contrasto, dipendono per sostenersi dall' istesso Principio,

cioè dalla Curva d' equilibrio degli archi semplici, o delle gabbie o carcasse, per così dire, di tali archi o diritti o zoppi costrutte. Furono le Volte a vela tolte dall' Emisfero; e le Cupole a più spicchi o mezzifusi, terminati da Costoloni alzatisi sopra i vertici degli angoli d' un Poligono, furon ideate giusta il mio parere dagli Architetti non tanto a scanso dei peducci o mensoloni, i quali reggono sempre in falso il Ciel sovrapposto, quanto a cagione che su Pianta circolare (e peggio se ovata) mal riescono i scompartimenti e gli ornati d' intercolonj, d' Archi, di Porte, Finestre, Nicchie, Cappelle, e tutt' altro che sia dispiacevole all'occhio subitochè non secondi la linea retta, e non riposi o almeno non mostri di riposar saldamente su i suoi sostegni, o stipiti o pilastri o colonne, non sdrajato, non supino, non fuor di piombo; di che ce ne porge un esempio palpabile la Tribuna rotonda della Chiesa dell' Annunziata di Firenze col concentrico Coro interno viceversa poligono, sebben s' asserisca esser una delle Opere esimie disegnate, a testimonianza di parecchi Cronisti, da Leon Batista Alberti, Architetto filosofo, in confronto di Pietro Berrettini da Cortona, e di Gian Lorenzo Bernini meritissimi per altri titoli, e Scrittore egregio in materia di belle-Arti. Ma lasciando da parte quest'ultima riflessione meramente accessoria mi sembra frattanto abbastanza provato quell' Articolo, che in primo luogo m' era venuto in mente di dimostrare, ed è che la Statica di tutti i Cieli ha il fondamento medesimo „ unico, nitidissimo, e semplicissimo „ del Cielo *a mezzabotte*, il quale perciò ne contiene in totalità la Dottrina; che il Cielo stesso *a mezzabotte* dipende pe 'l proprio equilibrio da quello del solo suo Arco o Taglio o Profilo generatore; e che quest' ultimo equilibrio finalmente s' ottiene disegnando il detto generatore in Linea *catenaria* più o meno composta secondo la diversità delle circostanze da introdursi com' elementi particolari nell' Equazion generale di quella Curva $\frac{Cdx}{dy} = S\phi(s)ds$, equipol-

lente a $dy = \frac{Cdx}{\sqrt{(SF(x)dx)^2 - C^2}}$: Equazione, che si sapeva sino dall' Anno MDCCXLIII. perchè inserita (a pag. 270—2) nel VII.° Tomo *Miscellanea Berolinensia ad incrementum Scientiarum;* Equazione, che in se comprende come caso speciale la *Catenaria* semplice $Cdx = sdy$, ovvero $dy = Cdx : \sqrt{x^2 - C^2}$, dipendente per la sua costruzione dai *Logaritmi* ossia dalla rettificazione della Parabola Apolloniana; Equazione conosciuta per tale sino dal MDCXCI, e per la cui ricerca Bossut nel MDCCLXX—LXXIV. e LXXVI. ha dovuto faticare più assai all' effetto di derivarla dall' altra Equazione C $\frac{ds^2}{dy^2} = r$ (raggio *osculatore* $\frac{ds^3}{dyd^2x - dxd^2y}$) dedotta dalla generalissima sua (data pure sotto diversa forma e cotanto avanti da Clairaut seniore) $\frac{Cds^2}{dy^2} = r\phi(s)$. Nella qual *Funzione* ϕ dell'Arco s della metà della Curva, contato dal vertice, s'intende abbracciata la gradazione o legge o *scala* dei *pesi* distribuiti con geometrica continuità lungo dell' Arco o della metà di lunghezza della *Catena* pendente ed inestensibile; e questa catena, catenella o rosario o serie *continua* di pesi, come infilati e a contatto l' uno dell' altro, non può a meno di non disporsi talmente che il suo *centro di gravità* non vada a fermarsi nel punto più basso possibile, e viceversa capovolta in figura di mezzo Cielo nel più alto punto, e manco stabile per l' equilibrio.

Venendo adesso al secondo Articolo, null' altro in questo s' esige eccettochè di racchiudere nella premessa Equazion generale tutte le condizioni *analiticamente* espresse, che sono coerenti al volgar modo di conformare, e di caricare le Volte. Quelle, a causa d' esempio, dei Ponti sogliono avere nel concavo una Curva diversa dall' altra della loro schiena o del loro convesso; laonde per questo lato i cunei tronchi, che le compongono, essendo di vario peso e misura dalla chiave ai piè-diritti, appartengono ad una *Catenaria* compo-

sta, la cui legge o specialità dee contenersi in $\phi(s)$ come *data* Funzione; ed appunto quale sarebbe eziandio della Curva dei digradati *costoloni* di Cupole perfette o imperfette. Si suole ancora comunemente aggravare i Ponti ai lor fianchi con ripieni di muro, di terra, ec. per le pedate, di lastrico per la carreggiata, e gli archi estremi della Volta, e ad essi contigui, di parapetti e spallette, e di *marciapiedi* (*trottoirs*) a salvezza e comodo dei pedoni, adoperandovisi per lo più materiali di *specifica* gravità differente da quella della pietra forte, macigno, marmo, o altrettale impiegatosi nel solido della Volta. Segue l' istesso delle Volte *a mezzabotte*, che cuoprono le Gallerie sotterranee, le Mine, i Cammini-coperti, ed altre Opere di fortificazione per difesa od offesa delle Piazze da guerra; ed è tanto raro d' incontrar Ponti o Edifizj sotterra col solo carico delle lor Volte quanto è frequente il vedere o Cupolette fornite dell' unico Cielo senz' altro aggravamento sopr' esso, o Cupole gigantesche isolate, senza rinfianchi, di sottilissimo lavoro, che a foggia di quella veramente ammirabile di Milano, appellata dal Cesarini „ Sacra Ede baricefala „ nel suo *Vitruvio* del MDXXI., non men che dal Busca in una *Scrittura* del MDCXCVII., sembrano fender l' aria maestose, e sollevarsi quasi oltre al confin della vista nella region delle nuvole sul Tempio massimo, ch' esse sovranamente incoronano. Ora tenendo conto, per mezzo delle gravità *specifiche* respettive dedotte dai debiti sperimenti, del peso riunito della colonna verticale esilissima e pressochè lineare, composta del material della Volta dal concavo al suo convesso, del rinfianco, del lastrico, della coperta, padiglione o tettoja, ec., la quale carica ognun dei punti della Curva interiore, e *datane* pei varj casi la *legge* del progredimento punto per punto di tutti i pesi riuniti dal serraglio dell' Arco sino alla sua impostatura (legge che, dovendo esser *continua*, sarà sempre esprimibile per $\phi(s)$) si ricade nella medesima Equazion generale $C\,\frac{dx}{dy} = S\phi(s).ds$, e

niun' altra difficoltà vi rimane ad eccezione di quella delle operazioni dell' Algebra per assegnare le *condizioni* dell' equilibrio, ossia il rapporto, che debba esservi tra la Curva del concavo della Volta, l' altra del suo dorso o convesso, e la terza del convesso dei materiali del sopraccarico divisato, mercè della quale Equazione, potendosi a piacimento disporre d' una di queste trè Linee, si determina l' *Equilibrio*.

Oltre a sì fatta naturale facilità di risolvere in genere ed in particolare il Problema *statico* di tutti i Cieli, havvi ancora una seconda maniera più semplice di riguardarlo, e più adattata al concepimento di checchessia; e questa facilità procede ugualmente dalla considerazione della medesima *Catenaria*. È difatti elemental proprietà di questa Curva *trascendente* che una forza orizzontale *costante* posta nel vertice contrabbilancia e distrugge l' effetto della sollecitazione a discendere, come sopra un piano declive, di qualunque sua parte, contata sempre dal detto vertice, sulla tangente condotta dall' ultimo punto di essa parte alla Curva. Quella unione di cunei troncati, e tenuti a stretto contatto per l' equilibrio fa conseguentemente in un Arco, dalla sua chiave sino ad un punto comunque preso, le veci d' un Corpo grave tendente a discendere sul Piano inclinato all' orizzonte, e perfettamente liscio o levigato, della faccia del cuneo tronco consecutivo, ma impedito nella discesa, e tenuto fermo al suo luogo mediante la forza contrapposta premente, e sempre della stessa grandezza, che agisce in direzione orizzontale, e lo serra e mantiene del tutto immobile. Ed ecco così l' investigazione di sopra ridotta alla massima inaspettata semplicità, quale si è quella dell' applicazione ad essa della Dottrina facile di Galileo concernente i *Piani declivi* in riguardo alla discesa dei Gravi; poichè tal Dottrina conduce immediatamente pe 'l conseguimento del cercato *equilibrio* in ogni punto alla stessa universale Equazione della *Catenaria*, e vale a dire a $(S\phi(s)ds)\frac{dy}{dx} = C$, come innanzi. A questa stessa E-

quazion finale di tutte insieme le *Catenarie*, o alla sua *differenziale prima*, dopo d' un lungo giro di calcolo era giunto (lo ripeto perchè molto importa) ancora Bossut senza fare niun passo ulteriore, nell' ipotesi della Gravità terrestre, a paragon del già fatto avanti di lui; e ciò a motivo che considerato avea l' equilibrio partitamente tra ogni coppia di cunei contigui, e questi poscia supposti *infinitesimi*, mentre in ultimo la *costante* C, senza sapersi precisamente che cosa di fatto rappresentasse, si poneva da lui come la solita *indeterminata* nell' *integrar* l' Equazione *differenziale*. E sia notato quì di passaggio che introdottosi, come nella Fig.ª 1.ª, il Raggio *osculatore* o di curvatura del concavo della Volta nell' Equazione, ciò porta sempre a presuppor che le commessure tutte, o ciascun de' conventi dei cunei troncati, sieno alla Curva normali, e che oltre a questo essendo $S\varphi(s).ds$ proporzionale a $\frac{dx}{dy}$ si abbia per Corollario immediato che i *Pesi* assoluti delle porzioni della Volta, cominciate a contarsi dal *serraglio*, crescono in proporzione delle *tangenti* degli angoli formati dalle normali condotte dai punti estremi di quelle porzioni alla Curva, laonde possono rappresentarsi nel modo indicato dalla Fig.ª 2.ª, segnata ancora da Clairaut il vecchio nella penultima o quinta Figura della Tavola IV.ª (pag. 272.) per la sua general *Catenaria* in un colla frase correlativa *tangentes proportionales ponderibus suspensis*, partendosi dall' universale *Funicolaria* nel suo precitato lavoro Analitico — *Methodus generalis inveniendi Catenarias* —, e dimostrata dal Delahire prima di lui (MDCCXII.) unicamente pe 'l caso del concavo circolare o *punto fermo* de' Cieli.

Il Problema, che andando dietro dirittamente alla premessa Teoria offrirebbesi adesso avanti d'ogni altro, sarebbe quel d' assegnare, *dato* che sia il *concavo* d' una Volta, il *convesso* della medesima perchè questa venisse ad essere in equilibrio, senz' apporle però nessun sopraccarico. Couplet in

una delle sue *Memorie* del MDCCXXIX. e MDCCXXX. ne sciolse un semplicissimo caso in cercando l' andamento del dorso o dell' esterior della Volta posto che il concavo o l' interiore fosse un Arco di Circolo, e le teste dei tronchi di cunei fosser Archi ciascun concentrici alla sottoposta Circonferenza della porzione di Cerchio. Risolverebbesi questo Problema generalmente col supporre *infinitesimi* nella loro grossezza i cunei troncati; e mediante l' Equazione *differenziale* della *Catenaria* in genere $C\, d\dfrac{\left(\frac{dx}{dy}\right)}{ds} = \phi(s)$, il cui primo *membro* essendo una *Funzione* conosciuta di x in virtù della *data* Curva del *concavo* della Volta, viene a determinarsi da questa *Funzione* l' intervallo o distanza per ogni punto tra il *concavo* ed il *convesso* nella direzione parallela all' *asse* delle ascisse, ovvero il carico della Volta $\phi(s)$ sovr' ogni punto del *concavo* della medesima, ed a conoscersi, e delinearsi così l' andamento *continuo* del suo *convesso*. Al quale andamento o perimetro delineato condotti i prolungamenti dei raggi *osculatori* cogniti del *dato* profilo interior della Volta (Fig.[a] 3.[a]) verranno a sapersi le rispettive dimensioni delle lunghezze delle commessure o delle faccie de' *cunei* dalla *chiave* sino all' ultimo di loro posante su i *Piè-diritti*. È facil vedere col mezzo della Fig.[a] 1.[a] che posto r il raggio di *curvatura* del Profilo interno della Volta, ed u la continuazione dello stesso raggio sino all' incontro del Profilo esteriore, questa u denotante la lunghezza *variabile* della commessura (*joint*) verrà a conoscersi come $\phi(s)$, o ancora come $\phi'(x)$ col mezzo dell' Equazione $u\left(\frac{2r+u}{2r}\right) = \frac{Cds^3}{xdy^3}$, per rispetto ad u di secondo *grado;* la cui costruzione geometrica, o *grafica* che debba dirsi, apparisce chiarissima dalla 3.[a] Figura, che ha il pregio d' una maggiore semplicità in confronto di quella da Couplet già assegnata pe 'l solo caso del *circolar* Profilo interiore (*intrados.*) della Volta proposta ad esempio d' applicazione di siffatta Teoria. Sembrò *paradossa* a taluni, che giudicaronla

perciò vacillante, questa Dottrina, quando s'accorsero che la Volta pe 'l miglior garbo sorgendo a squadra dalla sua *impostatura*, l' ultima delle *giunture* normali posante sul *Piè-diritto*, e determinante la lunghezza della faccia inferiore dell'estremo *massimo* cuneo troncato dopo il primo e *minimo* del *serraglio*, riuscisse *infinita* o fosse *assintoto* della Curva esteriore (*extrados*), che non dissimile alla Concoide, alla Versiera, e ad altre Linee di questa fatta avrebbe un *flesso-contrario* di quà e di là dalla *chiave* o dal proprio vertice, e di *convessa* volgerebbesi in *concava*. Forse (aggiungevano) fu questo il motivo naturalmente sentito, se non dedotto dai Principj della Meccanica, per cui gli Architetti Romani foggiar solevano sempre in antico gli Archi dei loro Ponti in porzioni di Cerchio o Archi scemi (*bombès*), che nascessero ad angolo acuto sulle lor Pile o Pigne com' altri dicono, dei quali infra i vetusti bellissimo, e sovr' ogni credere adorno di bassi rilievi, di statue, e d' architettoniche dignitose modinature ammirasi ancora il Ponte d'Augusto o Tiberio sulla Marecchia, non molto discosto dalla sua foce o dal Porto di Rimini, e nei Secoli di mezzo s'annovera con particolar distinzione il Ponte Vecchio di Firenze, saldissimo e amplissimo, che dopo dell' escrescenza terribile d' Arno sopravvenuta nel MCCCXXXIII. disegnò Taddeo Gaddi. Vero è però che agli amatori del bello stile in Architettura, avvezzi persino ad alzare il Semicerchio colla giunta di tanto di *piè-diritto* quanto importi dovendolo veder da basso, il non restarne coperto nella visuale il nascimento dell' Arco a causa dell' *aggetto* della sottoposta cornice, dispiaccion sempre moltissimo questi angoli minori del retto, simiglianti a quelli dei tarsi delle palpebre (*augive*, *ogive* da *aug* occhio in Tedesco); sì come parimente rincrescono Archi in opposto senso, cioè porzioni maggiori del Semicerchio, usate dai Mauri, e nascenti ad angolo ottuso, per causa di quell' ingrato garetto (*jaret*), che poco sopra l' impostatura riesce, e fa manifesto che il garbo, la maestà, ed il riposo dello

sguardo finamente discernitore s' ottengon solo nell' angol di mezzo tra gl' innumerevoli acuti ed ottusi. Nè doveva a ragione niun Geometra o Artista consumato maravigliarsi di quel qualsisia *paradosso*. Imperciocchè primamente ogni *Catenaria* semplice, o in qualunque modo composta e lunga essa sia, impiantasi sempre ad angoli *acuti* sulla sua base, e vi vorrebbe nella seconda supposizione un peso *infinito* (o impossibile) alle sue estremità perchè si convertissero in *retti*. Oltre a ciò potea ben prevedersi quest' incontro dell' *Infinito* anche senza bisogno d' interrogare l' Analisi. Dovevano pure tutti quei cunei (*voussoirs*), supposti com' erano infinitamente sottili, agire e reagire gli uni contro degli altri colla lor gravità respettiva, onde disporsi nello stato dell' equilibrio. Or chi non vede che l' *assoluta* ed intera gravità del *serraglio*, perchè unico *verticale*, agisce contro dei suoi vicini, e che questi *cunei*, a proporzione che si discostan da quello, agiscono e reagiscono colla loro gravità *relativa* sempre meno efficace più che s' approssimano all' *impostatura* dell' Arco ossia all' ultimo *cuneo*, il qual giacendo *orizzontale*, mentre tutti gli altri son più o meno declivi, nulla oppone di sforzo, e anzi resta inoperoso così, e meramente *passivo?* Siccome dunque in questo sistema particolar d' *Equilibrio* colla maggior progressiva lunghezza de' *cunei* compensasi gradatamente l' azion della gravità, che dal vertice in giù dell' Arco, scemando il *declivio*, si fa sempre minore; dove questa riesce poi *nulla*, in qual maniera potrebbe mai compensarsi eccettocchè con una lunghezza *infinita?* L' Algebra secondo il suo proprio linguaggio non poteva altramente mostrare questa *impossibilità* d' equilibrio fuorchè rispondendo o coll' *imaginario*, che non v' avea luogo, o col simbolo dell' *Infinito;* e frattanto dava a conoscere che una Volta di simil sorte doveva piantarsi, a scanso dell' *Infinito*, sulla cima tagliata in iscorcio, a sghembo o schiancio (*en biais*) del suo *Piè-diritto*, talquale si vede segnato nella 1.ª Figura.

Segue dal precedente discorso che, inteso sempre di ra-

gionare dell' equilibrio d' assestamento spontaneo, e vale a dire di pezzi sciolti ed a stretta l' uno all' altro, all' effetto che i *cunei* troncati (*voussoirs*) infinitamente sottili dovessero essere in tutti i punti d' egual lunghezza, e che la Curva esteriore (*extrados*) riuscisse parallela all' interiore (*intrados*), stando al significato del parallelismo *generale* contemplatosi per la prima volta mediante l' *Evolute* da Leibnitz, farebbe di mestiere che la seconda fosse non altra che la *Catenaria* semplice Bernoulliana. Una conseguenza più estesa sì è quella che *dato* il Profilo del concavo della Volta potrebbesi moderare in due differenti maniere la lunghezza troppo crescente, ed in ultimo esorbitante dei *cunei* nel loro procedere dalla cima verso le due *impostature*, cioè, o collo scegliere materiali (sien marmi, sien pietre, mattoni, ec.) di diversa *specifica* gravità, purchè non fosse tale la differenza che i più ponderosi troppo premendo i men gravi e meno compatti di grana gli schiacciassero o disfacessero, ma si tenesse questa tra certi limiti insegnatici come i più acconci e i più comodi dalla Pratica, o con introdurre per altro nuovo elemento o *indeterminata* nella ricerca dell' Equazione *locale* del convesso esteriore l' inclinazione o l' angolo, per rispetto alla *verticale*, delle commettiture o conventi de' *cunei*; il qual angolo, quando questi conventi ponevansi normali alla Curva interna, aveva $\frac{dx}{dy}$, ovvero una *Funzione determinata* di x, come sua *tangente*. Maneggiando perciò or l' uno or l' altro di quei due nuovi elementi, ridotti o considerati riguardo al Calcolo in qualità di *Funzioni* d'una delle *variabili* della *data* Curva interiore, e coi soliti volgari metodi dell' Analisi facendo simultaneamente *variare* gl' istessi elementi, ma rinserrandoli tra i confini più *praticabili*, e finalmente *determinando* quelle *Funzioni* all' uopo preciso di ricavarne la natura e l' indole della Curva esteriore, che compète allo stato ed alle condizioni dell' equilibrio, toglierebbesi allora quella *impossibilità* pratica divisata pocanzi di po-

ter conseguire dentro ai limiti del *finito* la risoluzion generale del Quesito propostosi. Nè a toglier di mezzo quell' *infinito* importuno varrebbe il ricorrere o al compenso di lasciare scabre, e non come innanzi liscie o brunite, le faccie dei *cunei*, onde confidare nel loro vicendevole *soffregamento*, o all'altro di renderli insiem collegati e coerenti per via di cemento laddove erano in prima supposti scorrevoli e liberi nel sollecitamento della loro discesa: perocchè e l'*attrito* procedente dalla scabrosità delle fascie e la forza mutua di *coesione*, di cui terrò in appresso proposito, non sono nè posson esser mai tali da stare a competenza coll' *infinito*. Egli è poi puro esercizio di Calcolo algebrico, qualora più piaccia, il riferire anche la Curva esteriore (*extrados*) come l'interiore (o l'*intrados*) alle comuni *coordinate* normali x, y, affin di dedurne così l' Equazione, conoscerne il *grado* alla maniera ordinaria, e facilitarne la costruzione o *numerica* o *grafica* per via di punti o continua, a seconda dei casi speciali, che fossero mai per appresentarsi al discernimento ed all' esigenza dell'Architetto, o alla severa disamina dell' Analista. Posta, a causa d' esempio, vedendola di sotto in su, semicircolare una *Mezzabotte*, la Curva dorsale (Fig.ª 3.ª) avrebbe per simbolo l' Equazion di quart' *ordine* facilissima a rintracciarsi (contate le *ascisse* dal centro) $x^2+y^2=(r+u)^2=r^2+a\,(2r+a)\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)$ in virtù della *Formula* antecedente trovata per u, e dell' adequata *determinazione* della *costante* C pel caso di $x=0$, cui corrisponde la *positiva* e la *negativa* ordinata $\pm(r+a)$ (essendo a la lunghezza della *chiave*), senza notar l' altre due $y=0$, che nulla han da fare colla Quistione, ma indicano un *punto doppio*, ed un *nodo* o galano (λημνισκος), che riunisce i rami o le branche di questa Linea del quarto o Curva del terzo *grado*, giusta la regola dei Matematici. Omesse piuttosto tutte le speculazioni analitiche estranie affatto alla Statica, e tenuta ferma la medesima ipotesi della *Mezzabotte* perfetta, reale o Romana, dalla parte di sotto,

contemplisi in quella vece come, *equilibrata* che sia mediante i *cunei*, che la compongono e si terminano al suo *convesso*, proceda la gradazione delle *pressioni*, che sostien ciascuno dei punti del *concavo* dal *serraglio* sino alle *impostature*. La *Formula* generale della *pressione* era $\frac{Cds^2}{rdy^2}$; e nella circostanza prescelta del Semicircolo si fa semplicissima perchè r è *costante*, e C (trattandosi di *proporzionalità*) si può esprimere per r^2; laonde diventa $\frac{r^3}{r^2-y^2}$. Di quì si ricava che nel *serraglio* la *pressione* è come r; giunta all' ottante, $2r$; al fin del quadrante, $\frac{r^3}{0}$; e vale a dire raddoppiata sol la *pressione* dalla *testa* ai *reni*, e poi rapidissimamente cresciuta sino all' *infinito* dai *reni* a' suoi *piedi*. Da ciò n'è nata la spiegazione comune del perchè queste Volte per lo più si squarcino, fendansi o *pelino*, e qualche fiata minaccin rovina su i *reni* tra il terzo ed il mezzo, ove la forza *premente* con una specie di *salto* s' aumenta; e di quì Delahire prese per avventura motivo di fondare su tal principio, specialmente adottato per gli Archi Gotici, la sua generale ma difettosa Teoria delle Volte.

Del rimanente ponendo che *dati* siano i due Profili *concavo* e *convesso* d' un Arco, e che le *commettiture* (*joints*) dei sottilissimi pezzi, che lo compongono, debban esser *normali* all' interno Profilo, l' *equilibrio* potrà ottenersi col trovare la *legge di variazione* delle *gravità specifiche* dei singoli pezzi o *cunei* da impiegare a tal fine mediante la solita *Catenaria* di Clairaut seniore, fondamento unico di tutta questa Dottrina. E difatto applicandone al caso presente la sua Equazione $S\varphi(s).ds = C\frac{dx}{dy}$, il cui primo *membro* esprime il *peso* dell' Arco contato dal colmo, peso composto della *Somma* dei prodotti d' ogni archetto ds per l' altezza della respettiva *commettitura*, o normale frapposta alle due *date* Cur-

ve riferite ai medesimi *assi* (prodotti o elementi da esprimersi con una *Funzione data* F(x)) e per la gravità *specifica* o altra *Funzione incognita* $f(x)$, conseguirassi

$S\,F(x).f(x).dx = C\,\frac{dx}{dy} = C\,\phi'(x)$; cosicchè *differenziando* si avrà

$F(x).f(x).dx = C\phi'(x).dx$, ovvero $f(x) = C\,\frac{\phi'(x)}{F(x)}$, che *determina* la *Funzione* rappresentante la *Legge* cercata delle *specifiche* gravità respettive, mentre la *determinazione* della *costante* dipende dal peso *dato* d' una *data* porzione dell' Arco. Ma quantunque con questo mezzo dell' impiego di materiali diversamente gravi in egual volume (difficilissimi ad ottenersi anche coi varj gradi di cottura nelle Fornaci, se si preferisse il *Lavoro-quadro* o la *Figulina*, a seconda della trovata *Funzione*) venisse a sfuggirsi la soverchia crescente lunghezza de' *cunei*, non si sfuggirebbe tampoco il *paradosso* medesimo dell' *Infinito* nel grado di *specifica gravità* dell' ultimo pezzo, che orizzontalmente posasse sul *coussinet* o guancialetto del *Piè-diritto*. E ciò dovea ben presagirsi, semprechè l' *infinito*, il quale riusciva di risparmiarsi da un lato, ragion voleva che mutato comunque sembiante ricomparisse, e passasse dall' altro lato, così prescrivendo la *legge* immancabilmente imposta dall' *equilibrio*. Sperimentata, per esercizio di Calcolo, la necessità di tal legge in un Arco o Volta semicircolare, d' uniforme grossezza a in tutti i suoi punti, come la *Reale*, la Volterrana, le loro *ghiere* o rinforzi, ec., e il cui *serraglio* infinitesimo pesi $a\pi$, essendo π simbolo della sua *specifica gravità*, dall' Equazione *data* $y^2 = 2rx - x^2$, che dà $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r-x}$, e $\frac{ds}{dx} = \frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}}$, ricavasi $f(x) = \frac{2r^2}{2ar+a^2} \cdot \frac{a\pi r}{(r-x)^2}$; nella quale espressione postavi poscia $x = r$, vale a dire riferita al *piede* o all' *impostatura*, essa agguagliasi all' ∞, e significa π', *gravità specifica* dell' estremo infinitesimo *cuneo*, infinita a paragon della π assegnata alla *chiave*.

Vedasi ora se più felice riuscisse il successo dell' introduzione dell' altro elemento, contrario però all' uso purtroppo invalso di collocare i *cunei* tutti componenti un Arco colle *commessure* loro (*joints*) perpendicolari al contorno o perimetro del medesimo. Molte osservazioni preliminari sono a questo proposito indispensabili. E prima di tutto s' avverta che sebbene la condizione ordinaria della *perpendicolarità* prenotata non sia d' assoluta necessità per la salda costruzione d' un Arco, il quale formato di pezzi *cuneiformi* pesanti colle lor faccie liscie in vicendevol contatto si sostenga in aria ben bilanciato e senza grappe o cemento di per se stesso, nulladimeno questa, ch' io chiamerò licenza nell' Arte di fabbricare le Volte, ha positivo bisogno di non oltrepassar mai certi determinati confini. I limiti, dentro ai quali dee rimaner ristretta licenza sì fatta, prendon regola, e si desumono da operare in modo che nel *taglio* de' cunei comunque inclinati col *profilo* delle lor faccie alla *verticale* non avvengano mai angoli troppo acuti, deboli, e facili per questo accidente a smussarsi; lo che dovrebbe in buona Pratica esser egualmente scansato quando atteso la molta differenza delle due Curve *interiore* ed *esteriore* dell' Arco la divisata *perpendicolarità* delle *commessure* alla prima rigorosamente osservata portasse a simile inconveniente nella testa de' cunei. Un' altra avvertenza si è quella di rammentarsi che non basta all' effetto di stabilir l' equilibrio o la quiete d' un Corpo grave liberamente scorrevole sopra un Piano inchinato che la *resultante* di tutte le *Forze*, le quali sollecitano insieme quel Corpo, sia perpendicolare al Piano, su cui desso posa, ma ci vuol che oltre a ciò la perpendicolare medesima, ovvero il suo *piede* cada sopra la *base* del Corpo, ponendo sempre che il Piano non ceda, e costituisca un ostacolo insuperabile. Di questa *seconda* condizione non importava tenerne espressa contezza quando le *commessure* o i *conventi* eran *normali* al *profilo interno* dell' Arco, qualunque si fosse l' *esterno*, sempre divergente dall' altro giusta la fatta ipotesi del *soprac-*

carico, perchè implicitamente contenuta nella *prima* condizione, la qual porta seco colla maggiore evidenza (Fig.[a] 1.[a]) che il *Luogo geometrico* di tutti i *piedi* delle *perpendicolari resultanti* predette esser debba una Curva *parallela* al profilo interno (*intrados*) testè divisato. Non così però avviene tostochè le *commessure* o gli spigoli o tagli de' *cunei* (*voussoirs*) sieno altramente disposti, e che l' Equazione della *Curva d'Equilibrio*, in cambio d'essere $\varphi(x) = C\,\frac{dx}{dy}$, ove $\frac{dx}{dy}$, *Funzione data* di x, è la *tangente* dell' angolo della *commessura* colla *verticale* o coll' *a piombo*, dovesse mutarsi in $\varphi(x) = C$ tang.θ, stando θ per l' angolo o inclinazione della *commessura* rispetto alla *verticale*; angolo *variabile* sotto diversa Legge o *Funzione*. A fine d' assoggettar questa Legge diversa ad un'Equazione farebbe mestieri supporre che tutte l' estremità o *piedi* delle *resultanti* si collocassero sopra un *dato Luogo geometrico* tra i due profili *esteriore*, e *interiore*. Nè volendo elevare la mente a cotanta altezza d' Analisi basterà rinserrare tra due *limiti* facili a stabilirsi la *costante* C, che rimane *determinata* quando *diasi* fin dapprincipio la misura o il valore θ' dell'angolo d'una *commessura* colla *verticale* in un punto *dato* dell' Arco. Eccone un saggio, che le Figure 4.[a] e 5.[a] renderanno viepiù manifesto.

Due son le *Forze* da aversi sempre in veduta; l'orizzontale *costante*, che si parte dal colmo, per tutte le *commessure*, e la verticale *variabile*, ch' è il *peso* o gravezza della parte dell' Arco contata dal colmo medesimo. Ora, affinchè queste due *componenti* abbiano per *composta* la perpendicolare alla *commessura*, e l' abbian tutte in buon punto d' appoggio sulla lunghezza *determinata* del fianco del *cuneo*, debbon esse *proporzionalmente* rappresentarsi dai due lati d' un Rettangolo, la cui *diagonale* sia la perpendicolare suddetta; e bisogna dipiù che se l' angolo della *commessura* (prolungata quanto fia d' uopo) colla verticale, ovvero θ, delineato nella 4.[a] Fig.[a], si ponga *variabile*, anche la C, ch' è *Fun-*

zione di θ, come farebbesi d' un *Parametro*, sia *variabil* di modo tale che presi il *massimo* e *minimo* di $F(\theta)$, resti compresa tra questi due *limiti*. Siccome dunque C è *data*, fa di mestieri osservare se, prescelto un angolo θ, la C, che ne derivasse, cioè $\frac{\phi(x)}{tang.\theta}$, fosse o no ristretta tra quei due *limiti*, o importasse contradizione coll' esigenza dell' Equilibrio; perocchè in tali casi bisognerebbe sostituire un altr'angolo θ, e così per ciascuno. Noto quì di passaggio che il *maximum* di $F(\theta)$ dà il *minimum* di C, e viceversa. Non debbo ometter bensì una delle più curiose, e più utili applicazioni di questa particolarità della Statica delle Volte a quelle, che s' assomigliano agli antichi *Soffitti*, da ornarsi con cassettoni, rosoni, trofei, o altri simboli o imprese scolpite in pietra od in marmo, e non già fuse in bronzo come nel Portico ottastilo del *Panteone*, inalzato colla direzion di Vitruvio Architetto d'Augusto (M. AGRIPPA. L. F. COS. TERTIVM. FECIT nel fregio), e nelle Loggie o Peristilj delle Basiliche, e che i Francesi appellar sogliono (Fig.ª 6ª) *Plates-bandes* assai meglio degli Artisti Italiani, che con aperta fallacia hanno costume di nominar le Volte-piane, e Archi-piani. Quì ell' è virtù tutta della direzione ad un punto solo di ciascheduna delle *commessure* de' *cunei* tronchi se si regge quest' Architrave più presto che Arco, o l' intero *Soffitto*, che n' è composto, e formato di pezzi diversi, e accostati di fianco l' un l' altro, il cui profilo *interiore* è una Linea retta, come *l'esteriore*, che gli è parallelo. La *tang.*θ prende in questo caso la forma di $\frac{x}{A}$, e manifesta che tutti i *tagli* de' *cunei*, protratti, che fossero, anderebbono a ferire un sol punto come *virtuale* lor centro, il qual centro o punto di riunione è stile dei Pratici, copiatori dal fatto studio sugli Esemplari, che s' hanno nelle Sagrestie del Duomo di Firenze, disegnate da Arnolfo di Lapo, ed altrove, il collocarlo nel vertice d' un Triangolo equilatero, il cui lato pareggi la *corda* o il

disteso o il profilo di tutto il *Soffitto*, incastrato a stretta tra i due *Piè-diritti*, che sian valevoli a reggere alla sua spinta. Ma perchè questa Pratica degli Architetti non riesca poi difettosa, dee ben attendersi che la perpendicolare elevata dal termin più basso della *commessura* estrema alla *commessura* medesima non incontri la verticale condotta pel *centro di gravità* del mezzo *Soffitto* fuor della sua linea esteriore (*extrados*), e che C non di troppo s' approssimi ai *limiti* C', C'', definiti di sopra, a scanso di portar tutto lo sforzo verso la punta d'un angolo del cuneo *troncato*, la quale non avesse consistenza bastevol per resistere a tale spinta, che in questo caso è fortissima sovr' ogni altra, senza pericolo di frattura.

Un Problema utilissimo alla negletta Dottrina delle *armature* può ancora sciogliersi coll' ajuto delle cose premesse. Cercasi in questo con qual gradazione i *cunei* d' una Volta appoggiati o posati sulla sottoposta *centina* di legname la premano nei varj punti avanti che resti serrata a forza colla sua *chiave*. È sollecitato alla *scesa* dalla gravità sua *relativa* ogni *cuneo*, ed alla *salita* per lo contrario da quella dei *cunei*, che viavia gli vengono soprapposti. Lo sforzo per la *discesa*, se a causa d'esempio la Volta *a mezzabotte* sia semicircolare, è rappresentato da $\frac{(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, e lo sforzo opposto o retrogrado da $\frac{xdx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, d'onde risulta che fin dove $x = \frac{r}{2}$, cioè dal colmo dell' Arco sino al *restante* dell' intera Circonferenza, da un lato e dall' altro scema sempre la *pressione* de' *cunei* sull' *armatura*, nel punto estremo del *restante* s' annulla, e da lì in poi pe' rimanenti 30° non esercitan quelli nessuna *pressione*, e non aggravano perciò niente la *centina*.

In quanto appartiensi alla *resistenza* dei *Piè-diritti*, la cui *massa* debba opporsi in contrasto alla *spinta* laterale indispensabil dell' Arco, non diversamente da quella dei Terrapieni (*Remblàis*, *Remparts*, etc.), qualunque esso siasi,

il calcolarla con espression *matematica* è assai ovvia ricerca, perchè dipende dalla volgare Teoria de' *Momenti* nel *Vette* inflesso o angolare dalla 7.ª Figura rappresentato. Contuttociò non par così facile il determinarla *fisicamente* a causa del vario modo, con cui si piegano, si sfaldano, si scompongono in somma, e romponsi i Solidi di specie diversa o lavorati d'un pezzo solo, vale a dir di *massello*, o composti di pezzi o rocchi legati con calce, malta ec. (*mortier*), accapezzati, colle lor faccie e commessure bene squadrate collo scarpello, o piuttosto messi in essere alla rinfusa (*en moellon*) sì come lo sono la massima parte dei Pilastri o Pile o Mezzepile (*Coulées*) delle Volte dei Ponti. All' effetto dunque di star sempre a vantaggio sulla *grossezza* da *darsi* ai *Piè-diritti*, dei quali è sempre *data* nelle circostanze speciali l' altezza, non conviene partir dall'ipotesi che l'asse *virtuale* di rotazione del *Piè-diritto*, casochè desso cedesse alla spinta, fosse all' estremo taglio o spigolo della sua pianta, ch' è sempre di piccola consistenza, ma bensì poco indentro a motivo di non menomare di troppo il suo braccio di *Leva*. A quel *punto indentro* dell'area della base mirar dee la *tangente* della Curva o Profilo *interiore* dell'Arco, come quella, che secondo l' indole e proprietà della general *Catenaria* è la *direzione* della *resultante* di tutte le Forze, le quali sollecitano la metà dell' Arco, che agisce contro del *Piè-diritto*. Decomposta perciò questa *resultante* nella Forza *verticale*, e nell' *orizzontale*, il *momento* dell' ultima, la cui *leva* è tutta l' altezza del *Piè-diritto*, dee contrabbilanciare i *momenti* riuniti della prima, che ha per *leva* la distanza dell'estremo interno del profilo della base dall' *asse* di rotazione, e della Forza di gravità del *Piè-diritto*, cumulata nel suo *centro d' inerzia*, il cui braccio di *leva* è la lontananza di quel centro dall' *asse* prenominato. Deducesi dall' Equazione tra gli additati *momenti* la *grossezza* (*epaisseur*) da darsi al *Piè-diritto* per l'*equilibrio*; grossezza da crescersi in pratica discretamente per porsi al coperto d' ogni pericolo, e per non ri-

correre ad imbrigliare le Fabbriche più suntuose e magnifiche colle catene, sempre ingrate alla vista, ed indicatrici scoperte di debolezza, e vacillamento, e d' un ardire insultante, ed intempestivo dell' Architetto. Sappiamo che la *Forza* dell'Arco col suo sopraccarico è somministrata dall' Equazion generale $F(x)\Pi + F'(x)\Pi' = (C\Pi + C'\Pi')\frac{ds^2}{rdy^2}$, e si riduce a $S\phi(x)dx$ da *integrarsi* dentro ai suoi confini, particolari a ogni caso; e può di quì conseguire un metodo anche più breve di determinar la *grossezza* medesima dei *Piè-diritti*. Conciossiachè il *momento* della Forza *orizzontale* costante, che dal sommo della *chiave* dell' Arco agisce contro del *Piè-diritto*, ed ha per *leva* la distanza dall' imo della sua base, dee stare in bilancia coi due *momenti* insieme del *Peso* del Semiarco avente per *leva* la distanza del punto di projezione del suo *centro di gravità* sulla base del *Piè-diritto* dall' *asse* virtuale di rotazione, e della *Massa*, come sopra, del *Piè-diritto* virtualmente mossa intorno all' *asse* medesimo. Conducono le due maniere all' istesso unico resultamento, perchè la *costante* espressa nella seconda era implicita nella prima, non meno che il *peso* dell' Arco, e si dispiegavan mediante la *risoluzione* della *Forza* unica in dirittura della *tangente*; laonde vicendevolmente i due modi, in apparenza diversi l' uno dall' altro, si servono di riprova o conferma.

Avanti di lasciar questo argomento gioverà dare un cenno d' un secondo *Paradosso*, che incontrasi nel considerare lo stato d' *equilibrio* delle Volte posta l' ipotesi del soffregamento *infinito*, che apparisce altrettanto fuor di natura quanto la supposizione diametralmente contraria del soffregamento *nullo* o della liscezza assoluta preternaturale delle superficie dei Corpi, sino ad ora adottata. La consuetudine per una parte omai rendutasi familiare di non attender punto al soffregamento nei Problemi ordinarj di Statica, e il sapersi da tutti per altra parte che l' *Infinito* è fuori affatto d' ogni misura e rapporto col materiale dell' Universo fan credere

immantinente che la nuova ipotesi sarebbe per essere meno ammissibile della prima, e per portare a più inconvenienti. Contuttociò il contrario n' avviene imperocchè, mentre dal *nulla* sonosi ricavati resultamenti di costruzione *impossibile*, vale a dire *infiniti*, dall' *infinito* s' ottengono viceversa di costruzione *possibile*, perchè *finiti*. Io non m' appiglio per questo al partito di Couplet (MDCCXXIX-XXX.) col supporre, com' egli fece, gratuitamente ed eziandio falsamente, poichè senza niun fondamento saldo, sopra il quale s' appoggi la sua nuova Dottrina, che la Volta cioè scelta in esempio *a puntofermo* nella Figura 8.[a] difatto sempre rompasi o tenda almeno a dividersi in quattro parti eguali (Delahire avea detto in tre, e lo seguita Belidor nella *Science des Ingeniers*), che per la scabrosità *infinita* delle faccie delle rotture non possan mai scorrere o sdrucciolare l' una sull' altra. Allora per impedire il movimento di rotazione di quelle parti, onde la tendenza alla rottura non abbia effetto, Couplet medesimo riduce il Problema a rintracciar la *grossezza* da darsi alla Volta, che in sequela del di lui calcolo si conseguisce mediante lo scioglimento d' un' Equazione di 3.° *grado*, ove tra le quantità cognite ha luogo la lunghezza dell' *Ottante* oltre a quella del Raggio. *Falsamente* (io diceva) l' Autor Francese si determinò a tal ipotesi, essendo certo che prima del supposto, e segnato movimento angolare, perchè dipoi avesse luogo, dovrebbero frangersi o smussarsi i cunei (*voussoirs*) verso le ottuse lor punte; il che non accadendo, secondo lui, porta all' assurdo della tacitamente supposta *coesion* delle parti *infinite*. Guardandosi nulladimeno sott' altro aspetto la cosa, quest' assurdo potrebbe di leggieri evitarsi ferma sempre l' ipotesi dell' *infinito* soffregamento, posta la quale ognun vede che non importa altrimenti ricorrere alle precedenti Equazioni, che abbracciano le due condizioni dell' *Equilibrio*. E difatti (Fig.[a] 9.[a]) basta solamente a tal uopo che la *resultante* della gravezza di qualunque delle porzioni dell' Arco, noverandole dalla *chiave* verso

le *impostature*, trovi il suo appoggio *stabile* sul fianco del *cuneo* tra il suo profilo interno, ed esterno; appoggio però, che non fosse troppo vicino, per la ragione esposta di sopra, nè all' uno nè all' altro estremo del *cuneo*, ma situato tra certi *limiti*, per cui tornerebbe dicevole che si distribuissero i loro punti sui perimetri di due Curve respettivamente parallele a ciascun dei profili dell' Arco. Quando aveva luogo la *condizione* dell' *equilibrio* i due *limiti* dipendevano dalla *costante* C; ma nel caso presente fa di mestieri risolvere il seguente Problema di Statica — „ Dati i due Profili d' un „ Arco, *interiore* cioè ed *esteriore* (*intrados et extrados*) de- „ terminare la *grossezza* del *Piè-diritto* perchè la *Forza* del- „ l' Arco, e la *Resistenza* del *Piè-diritto* medesimo si con- „ trabbilancino esattamente tra loro „ —. Così i due limiti diventeranno più estesi, e nell' applicazione loro alla Pratica s' amplierà l' uno per la sicurezza della stabilità della Fabbrica, e l' altro si terrà più ristretto pe 'l risparmio de' materiali soperchj nel muramento del *Piè-diritto*. Non intendo quì favellare di quelle Volte, la cui base non corrisponda alla pianta od icnografia delle sue fondamenta, come sarebbe il Cerchio e l'Ottagono sopra un Quadrato, o altrettali assai più bizzarre e Borrominesche, rette per aria sopra i *peducci* o le *mensole*, o dove i *contrafforti* non sieno con tanto accorgimento disposti quanto Epino lodava negli *Atti* dell' Accademia di Berlino del MDCCLV. essere stato quello del Buonarroti relativamente al *Tamburo*, ed all' *Attico* della gran Cupola Vaticana. Nel caso, ch' io imprendo adesso a considerare supponsonsi andantemente i *tagli* de' *cunei* normali alla Curva *interiore*. Ora, la distanza dall' *asse* o dalla *verticale*, che partasi dalla *chiave*, del *centro di gravità* della porzione dell' Arco, non meno che il *Peso* della porzione medesima, a forma dei *Dati*, riduconsi sempre in *Funzioni* di x, e perciò ancora il *momento* sarà espresso mediante $F(x)$ *determinata* dall' Equazione delle due Curve referite alle stesse perpendicolari *coordinate* x, y; al qual *momento* debb' esse-

re uguale quello della Forza *orizzontale costante* applicata al colmo dell' Arco; laonde ancor questa rappresenterassi *variabile* all' uopo per mezzo di $\phi(x)$ altra diversa *Funzione*. E combinando quèsta Equazione $C = \phi(x)$ coll' altra $\frac{d\phi(x)}{dx} = 0$, ed *eliminando* x, avrassi C *minima*, il cui valore viene ad essere espresso dalle *costanti* cognite delle dimensioni particolari dell' Arco. L' istesso discorso varrebbe per rintracciar l' altro *limite* del *maximum;* ma il già trovato conduce subito in Pratica ad assegnare il valor *minimo*, che dar si possa alla *grossezza* del *Piè-diritto* onde ottener l' equilibrio, postosi dove più piaccia il *virtual asse* di rotazione, e servendosi delle solite *Leve* inflesse o angolari, che ben si comprendono per mezzo dell' inspezione della Figura. Anzi se mai nel concreto del caso non fosse stato tenuto in piena osservanza quel *limite*, così che l' appoggio in buon punto a qualche *commessura* mancasse, potrebbe con siffatta notizia prevenirsi la rottura o il distacco, che n'avverrebbe in tale o tal sito, per mezzo degli ovvj rimedj, e soccorsi dell'Arte. Ed una *Tavola numerica* ben calcolata, in cui due *colonne* notassero i *raggi* dei Semicircoli, e le *grossezze* d' un Arco o Volta reale *a mezzabotte*, che suol essere la praticata con più di frequenza, e la terza *colonna* denotasse quel *limite* corrispondente alle due *variabili* dimensioni accennate, riuscirebbe purtroppo assai comoda per gli Artisti all' effetto di non eccedere nè scarseggiare tampoco in proposito delle misure dei *Piè-diritti* domandate dall' *equilibrio*. Aggiungo in fine che una Curva andante ben disegnata di *Genere parabolico*, od altrettale, renderebbe *continuo*, e scevro da ogni ricorso a nuove *interpolazioni* il progredimento di tutto ciò, che la *Tavola* non potrebbe mai dare fuorchè interrotto nel suo procedere ossia *non continuo*.

Rimane soltanto a compire la Statica delle Volte o dei loro elementi o profili, che sono gli Archi, coll' introdurre congruamente nel Calcolo la considerazione fisica del mutuo

soffregamento, e della *coesione* scambievole delle lor parti. Ma avanti d' entrare in materia così dilicata, e che sempre mal volentieri si presta all'Analisi, giova da prima ben concepire la differenza tra le Forze *attive* e *passive*. Si misurano quelle rigorosamente col moto, ch'è il loro effetto; queste per lo contrario, che meglio o con più adequato vocabolo direbbonsi Resistenze, non possono misurarsi effettivamente se non che mediante le Forze, che nei Sperimenti da instituirsene giungano a superarle; ed appunto perchè le vincono, non ne son mai la vera, e puntuale misura, cioè quella precisa, che importerebbe il vero *equilibrio* tra le Forze e le Resistenze, come s' ottiene tra le Forze e altre Forze. Dato un *Sistema*, tutto composto di Forze, lo stato del suo *equilibrio* consiste in un punto solo, ma desso ha una certa latitudine od estensione, e non è più *punto* in un Sistema misto di Forze e di Resistenze: la qual latitudine è però limitata talmente che oltrepassati i suoi *limiti* l' *equilibrio* si rompe, ed il *Sistema* incontanente *trabocca*. Questa latitudine svanirebbe subitochè per misura d' una Resistenza, o d' un ostacolo o impedimento *passivo*, si prendesse la Forza *massima*, che non lo superi, in vece della *minima*, come suol praticarsi, che difatto sebben di poco la superi.

Ciò premesso, rappresenterassi secondo la costumanza già invalsa il *soffregamento* o l' *attrito* per mezzo d' una frazione $\frac{1}{n}$ di P, intendendosi simboleggiata da P la *pressione*.

La *coesione* poi, che a differenza dei fluidi tien collegate più o men fortemente le molecole o parti elementali dei Solidi, dee credersi, come *resistenza* alla rottura, sempre proporzionale al *numero* delle molecole da distaccarsi, ovvero alla *superficie* della *sezione*; così che, se f denoti la quantità o misura della *coesione specifica* per l' *unità* dell' area, e la superficie sia a^2, verrà ad essere fa^2 la *resistenza* proporzionale da superarsi. Questa s' avverta esser tale, diversamente dall' *attrito*, che non solo si oppone per quanto pos-

sa, allo scorrimento delle due parti del Corpo l' una sull' altra nel luogo della tentata *rottura*, ma eziandio alla tentata disunion delle parti mediante una *forza* perpendicolare o comunque obliqua alla *sezione* della *rottura* che n' avvenisse.

Tornando dunque agli stessi Principj per la ricerca dell' *equilibrio* casochè sieno insieme ad agire e reagire la *gravità* la *coesione*, e il *soffregamento*, bisogna fare attenzione che il *Peso assoluto* d' una porzione dell' Arco contata al solito dal suo colmo, è una determinata $F(x)$, il di lei *relativo perpendicolare* alla *faccia* interna o al taglio o profilo del *cuneo* d' appoggio è $F(x)\frac{dx}{ds}$, e l' altro suo *relativo* nella direzione del taglio (*joint*) del *cuneo* estremo medesimo è $F(x)\frac{dy}{ds}$ mentre la Forza *orizzontale costante* C, tante volte considerataci innanzi, decomposta a seconda della *perpendicolare*, e quinci del taglio del *cuneo* diventa viceversa $C\frac{dy}{ds}$, e $C\frac{dx}{ds}$ respettivamente, ma in senso o direzione contraria rispetto alla prima. Nascon da ciò due Equazioni per l' *equilibrio*

$$(1.^a)\quad C\frac{dx}{ds}=F(x)\frac{dy}{ds}-\frac{\left(C\frac{dy}{ds}+F(x)\frac{dx}{ds}\right)}{n}-fz$$

$$(2.^a)\quad C\frac{dx}{ds}=F(x)\frac{dy}{ds}+\frac{\left(C\frac{dy}{ds}+F(x)\frac{dx}{ds}\right)}{n}+fz$$

nelle quali z indica il *taglio* intero laterale del *cuneo*, la cui lunghezza è *determinabile* in x supponendosi *date* amendue le Linee *esteriore* e *interiore* dell' Arco. Vedesi immantinente che se $n=\infty$, $f=0$, ciascuna delle due Equazioni si cambia in $F(x)=C\frac{dx}{dy}$, che è appunto la general *Catenaria*, dalla quale siamo partiti non attendendo nè alla *coesion* nè all' *attrito*, e cui adesso siam ricondotti, fondata validamente sopra un Teorema semplicissimo e splendidissimo di Galileo. Le due

Equazioni son tali, ben ponderandole e dispiegandole, che la prima dà il valor *minimo* della *costante* C, cioè la *Forza* sufficiente per impedire il discorrimento nel verso diretto, ovvero della *discesa*, e la seconda ne dà il valor *massimo*, cioè quella *Forza*, che metterebbe in sul punto preciso di scorrere un *cuneo* sull' altro nel senso opposto, e vale a dire in *salita*, che sono i due *limiti* del cercato *Equilibrio*. Questi conseguirebbonsi tosto avvertendo che $C = \frac{F(x)\left(\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{nds}\right) - fz}{\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{nds}}$ è una $\phi(x)$ conosciuta, non meno che parimente $C = \frac{F(x)\left(\frac{dy}{ds} + \frac{dx}{nds}\right) + fz}{\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{nds}}$ n' è un' altra $\Psi(x)$ conosciuta ancor essa; di modo tale che ricavar si possono quei due *limiti* mediante le due Equazioni combinate $C = \phi(x)$, $\frac{d\phi(x)}{dx} = 0$, e successivamente per mezzo delle altre due $C = \Psi(x)$, $\frac{d\Psi(x)}{dx} = 0$ ovvero $= \infty$ a forma della nota Dottrina concernente i *Massimi*, e *Minimi*, e salvo i *criterj* Analitici di già stabiliti magistralmente per distinguerli gli uni dagli altri. Ed intanto vi sono, e vi debbon essere questi due *limlti* perchè (torno a dire) l' *Equilibrio*, di cui adesso si parla, ha da sussistere tra *Forze* e *Resistenze*, tra agenti ed ostacoli alla produzione del loro effetto; nel qual caso non è un *punto* solo invariabile, non è uno stato unico e indivisibile come tra *Forze* e *Forze;* ma quell' *Equilibrio* va a pari della *Quiete* d'un Corpo, il quale posi immobile sopr' un Piano: desso vi resta *quieto* sempre e passivo sino a tanto che una Forza maggiore, estrania alla sua *Gravezza*, non sia valevole a vincer l' ostacolo; cosicchè in tutti gli innumerevoli stati intermedj di *Forze*, che insieme riunite non sieno a tanto o non arrivino a superarlo, il

Corpo sta, e seguita a stare, sebbene diversamente o disegualmente premuto, nello stesso *riposo* pacifico, senza far mostra o sembianza di niun disturbo nè della diversità del suo stato, che perciò mal si direbbe *Equilibrio* o precisa eguaglianza di *Forze*. Nella Pratica si costuma di prendere la più piccola C dipendente dalla prima Equazione, nè suole attendersi alla seconda. Contuttociò in tale stato di non esatto e rigoroso *Equilibrio* è di mestieri tener anche conto della seconda; poichè adoperando sì fattamente torna assai meglio per assicurare viepiù la saldezza della Volta o dell'Arco subitochè, non essendovi l'eguaglianza come nel vero *equilibrio*, bisognasse aumentare la *Forza* per fare scorrere i *cunei* un sull' altro, e romperne la loro unione. In ultimo, se le Linee *interiore*, ed *esteriore* dell'Arco conducessero in qualche caso per rispetto ai due valori di C a manifesta contradizione, ciò significherebbe, in virtù della solita magistrale decision dell' Analisi, che in questa particolar congiuntura l' *equllibrio* (mentre pur così debba volgarmente appellarsi) sarebbe impossibile.

Qualche parola fa di mestieri anco aggiungere sul proposito dei Pilastri o *Piè-diritti*, che reggon le Volte, onde più a fondo concepirne la resistenza, ch'essi debbono apporre a salvamento dell' *equilibrio*. Voglio dire dei *Pié-diritti* alzati dai fondamenti sino al nascimento dell' Arco, quantunque gli Architetti, e Scrittori di Belle-Arti in Italia intendan più spesso sotto 'l vocabolo di *Piè-diritto* una specie di tamburo, zoccolo, o fascia elevata sopra la testa, o il capitello che sia, del Pilastro ad oggetto d' ingentilire, e rendere di miglior garbo, e non torre alla vista di chi guardi dal pian-di-terra il principio della *Mezzabotte*, ec., siccome dalla Dipintura di Simon Memmi nella Cappella o Capitolo del primo Chiostro di S.ª Maria Novella, dipinto in verde da Paolo Uccello, ricavasi aver fatto il Brunelleschi rapporto al meno svelto Disegno o Modello, lasciato da Arnolfo, della maggior Cupola di Firenze.

Il *Piè-diritto* nella maniera ordinaria d' edificare concernente a Fabbriche più grandiose e cospicue non è già, come sopra si disse, un sol pezzo, nè la spinta contro di esso per rovesciarlo lo determina sempre nè può sempre determinarlo, come sin qui si suppose, a ruotare attorno al taglio (*arrête*) o spigolo estremo della sua base. Ed il vero, compongonsi il più delle volte i *Piè-diritti* di strati orizzontali di pietre squadrate collo scarpello, ben commesse, e con sottil cemento riunite (*par assises*); e la base o pianta di quelli non è libera, e sciolta, ma aderente al lor fondamento. Segue primieramente da ciò che il *Piè-diritto* non dee sostenere soltanto il *peso* della Mezzavolta, ed il proprio sulla sua base, e che il *momento* della *Forza* orizzontale *costante* debbe agguagliarsi ai due *momenti* insieme del *Piè-diritto*, e della *Forza* di *coesione* della sua pianta, che sono in senso opposto del piano; ma s' inferisce in secondo luogo che se ciascuna porzione di strato in strato avesse la facoltà di girare intorno al suo taglio esteriore, a causa del menomamento continuo del braccio di *Leva* dalla *base* all' *impostatura*, non vi sarebbe bisogno della stessa uniforme grossezza (*epaisseur*) del *Piè-diritto* dall' imo al sommo, e basterebbe per l' *equilibrio* farla viavia decrescente andando dalla *base* verso la *cima* a seconda del perimetro d' una Curva, che tornerebbe facile determinare. Quella Curva però assegnatasi da Bossut non pare applicabile al caso proposto, e guardando la 10.ª Figura ognuno potrà convincersene di per se stesso, nell' ipotesi sempre che della *coesione* debba tenersi contezza non meno che dell' *attrito*, di strato in strato. Può accadere difatti che delle due *Forze* sollecitanti, una *orizzontale*, l' altra *verticale*, la prima pe 'l maggior braccio di *Leva* trovi più facile il far girare uno degli strati più bassi intorno al suo taglio che il farlo scorrere (*glisser*) vincendo la resistenza dell' *attrito*, cagionato dalla *Forza* verticale, e della *coesione*; mentre all' incontro può darsi che non sia valevole pe 'l minor braccio di *Leva* a porre in movimento rotatorio

uno degli strati più alti, ma sia valevole a farlo scorrere sopra lo strato inferiore, onde la legge o *scala* delle *grosezze* del *Piè-diritto* dal fondo alla cima, diversamente da Bossut, dovrebbe allora dedursi mercè questo nuovo Principio. Del resto, se il moto solo di rotazione avesse da contemplarsi non tanto pei strati *orizzontali* del *Piè-diritto*, quanto pei *cunei* normali dell'Arco, del quale sian *date* le Curve *esterna*, ed *interna*, il Calcolo non appalesa nell' uno e nell' altro caso veruna Analitica difficoltà d' importanza. Così nella Fig.ª 5.ª, posta a la lunghezza *data* della prima *commessura*, z quella *variabile* delle altre *commessure* (ch'è una *Funzione* di x conosciuta), y l' *ordinata* della Curva *interiore*, $\varphi(x)$ il *peso* della porzione dell' Arco, y' la distanza del *centro di gravità* di questa porzione dall' *asse* di quella Curva, e finalmente f l' unità di misura della *coesione*, dall' eguaglianza dei *momenti* in senso contrario otterrebbesi espresso lo stato dell' *Equilibrio* pe 'l punto inferiore della *commessura* del *cuneo* dall' Equazione $\varphi(x)(y-y') = C(a+x) + \frac{fz^2}{2}$,

ovvero da $C = \dfrac{\varphi(x)(y-y') - \frac{fz^2}{2}}{a+x}$; e pe 'l punto superiore dall' Equazione consimile $\varphi(x)(y''-y') = C'(a+x-z\frac{dy}{ds}) + \frac{fz^2}{2}$, ossia

$C' = \dfrac{\varphi(x)(y''-y') - \frac{fz^2}{2}}{a+x-z\frac{dy}{ds}}$; dove i due valori di C, C' si tratterebbero come *limiti* (*massimo*, o *minimo*) nella maniera spiegata di sopra, e le medesime Formule adatterebbonsi al primo strato del *Piè-diritto* o ultimo della *Volta*, e (*mutatis mutandis*) ai consecutivi strati sino alla base.

Il modo bensì più comune di costruire nelle ordinarie Fabbriche i *Piè-diritti* consistendo nel lor muramento (*maçonnerie*) alla rinfusa, cioè senza niuna regolarità, e rafforzato unicamente di quando in quando per mezzo di leghe di

piétra o addentellature, onde presso a poco formarne con queste morse come un solo *massello* di sassi e calce, a guisa di grosso smalto o di breccia manipolata, è ora mestiere considerarli sotto cotal più semplice aspetto, e supporli d'un composto omogeneo in tutte le loro parti; perchè l'eccezioni, e circostanze fisiche accidentali, che vi potessero essere, ed ancor molte e assai varie, o sarebbe impossibile assoggettarle al Calcolo, o questo riuscirebbe sì complicato da non cavarne profitto nel doverlo poi convenevolmente, aggiustatamente, e con adeguato vantaggio applicare alla Pratica. Ho dunque rappresentato nella Fig.[a] 11.[a] il caso d'un Parallelepipedo rettangolo costruito nel modo esposto pocanzi, e fermato sulla sua pianta, la quale oltre al *Peso* della di lui propria massa soffra eziandio la *pressione* procedente da una *Forza* verticale, che pigi in sul mezzo della sua testa, e che una *Forza* orizzontale lo solleciti a rovesciarsi. In ultima analisi questo nei suoi termini più generali è il Problema da sciogliersi per restar sicuri che non vacillino, non si fendano, non si squammino o non rovinino i sostegni (qualunque nome essi s'abbiano), su cui posano, ed a cui sono congiunte, e raccomandate le Volte, le Cupole, ed ogni sorte di Loggie foggiate ad archi, le quali massimamente parlando d'Opere pubbliche, esigerebbe l'universal salvezza che, oltre all'ordine dell'Architettura esteriore, ed alla scelta appropiata degli Ornamenti *caratteristici*, dipendessero sempre dalla censura d'un'Accademia, o d'una illuminata Magistratura perpetua Edilizia. Propongo per ora alcuni Principj come un piccolo Saggio delle considerazioni da aversi su questo argomento difficile della Statica applicato all'Arte di fabbricare; e nel proporli agli Analisti, ed ai Fisici sono il primo a dover confessare che mancano di quella chiarezza, semplicità, sviluppamento, e perfezione, che sarebbe di mestieri che avessero per farne uso col maggior frutto; a tal che s'assomigliano in somma a quei fondamenti non tanto stabili quanto pe 'l ben della Pratica sarebbe d'uopo che fos-

sero, su i quali appoggiar si suole comunemente la tuttora contrastata Dottrina della *Resistenza dei Solidi*, rapporto a cui con molta ragione direbbesi dal Poeta

„ . . . . . . nasce a guisa di rampollo
„ A piè del vero il dubbio . . . . . „.

Sollecitato il più basso elemento del Solido dalla *Forza* orizzontale a disporsi alla rotazione attorno ad un punto interno, e far quivi nascere una rottura, tutti i punti della porzione, che staccandosi salga, resteranno più o meno tesi proporzionalmente alla distanza dal centro ossia punto fermo, e viceversa più o meno compressi, e nella proporzione medesima tutti i punti dell'altra rimanente porzione, che comprimendosi scenda. Dipende la situazione del punto fermo o centro del moto dalla composizione o tessitura particolare del Solido, e dalla resistenza *specifica*, che questa tessitura opponesse alla tensione, ed alla compression respettiva dei componenti il Solido divisato. Rispetto al Legno elastico omogeneo, per causa d'esempio, vuolsi avvertire che il *centro* sarebbe nel mezzo, perchè ciascuna sua parte o fibra presso a poco è capace d' opporre la medesima resistenza alla dilatazione, e alla compressione in ragion della *Forza*, che tenda a produrle; nè la rottura potrebbe mai farsi col punto fermo in sull'orlo della base del Solido eccettochè nel caso che le sue fibre fossero affatto rigide (*roides*), cioè senz' alcuna molla o elasticità; lo che (senza dire in particolare della Pietra elastica del Brasile, e del Marmo flessibile della Villa Borghese o Pinciana) giusta l' esperienze di Mariotte, e Muschenbroeck nemmen si verifica in generale della *grana* Marmorea o delle particelle esilissime di tutte le Pietre. Quando s' arrivasse a conoscere il posto preciso del punto fermo segnerebbesi presto anche la linea della *virtuale* rottura, e si determinerebbe la più piccola *Forza* orizzontale, che potesse produrla, mediante le relazioni d'egualità nello stato d' *equilibrio*, 1.ª tra le *Forze* e le *Resistenze*, 2.ª tra i loro *Momenti* nell' istante avanti della *rottura*, che acconciamente

direbbesi *virtuale*. Queste Equazioni conseguirebbonsi *decomponendo* le distensioni, e le compressioni (di qualunque direzione si vogliano) in *verticali*, ed *orizzontali*; perocchè la *somma* delle prime dovrebbe esser nulla (contatasi ancora, se piaccia, la *Gravezza* del Solido, e la *Forza* esteriore, che ne premesse la testa); la *somma* delle seconde uguale alla *Forza* orizzontale, ed uguali i *Momenti* sì dell' une come dell' altre. Ma nel caso, che or si contempla, d'una Massa incapace di distensione, e di compressione, com' io diceva, la *rottura* non potrebbe aver luogo salvochè in una certa linea, per rispetto a cui si verificasse che la Forza di *coesione* insiem con quella dell' *attrito* non potesse resistere alla *pressione* esercitata sull'imo o base del *Piè-diritto*. Fa dunque mestieri, all' effetto d' impedire qualunque distacco o disgregamento di parti nel *sodo* del *Piè-diritto* o Pilastro, non meno che rispetto alle *commessure* de' *cunei* tronchi dell'Arco, che tanto i punti situati nella base del *Piè-diritto*, su cui cada la *resultante* delle *Forze* sollecitanti, quanto quelli delle *commessure* o conventi dei *cunei* (*voussoirs*) quali e' si sieno, riescano tali che nella linea la più sfavorevole, ov' essi oppongono la *resistenza*, questa, cioè la *coesione* e l' *attrito* insieme, almeno equivalga alla *resultante* predetta. E posto ciò, diventa il Problema l' istesso appunto dell' altro, nel quale s' investigasse l' *equilibrio* tra una massa di terra pesante, ed il muro o *cortina* di rivestimento o rincalzamento, che la sostenga, mentre ancor già la risoluzione dipenderebbe dal porre il *limite* superiore o in *eccesso* per l' *equilibrio*, e l'inferiore o in *difetto* pe 'l rivestimento avvertito. N' ho segnato l' abbozzo lineare di facile intelligenza nella Figura 12.ª, relativamente alla quale, chiamando F la *pressione* sopra CO, *p* il *peso* di COE, COE', ec., CO *costante* a, e θ l' angolo *variabile* COE, ec., la *pressione* totale sopra il rivestimento *a scarpa* OE (*en talud*) verrebbe ad essere $p\,\text{Sen}.\theta + F\,\text{Cos}.\theta$, l' *attrito* sarebbe $\frac{p\,\text{Sen}.\theta + F\,\text{Cos}.\theta}{n}$, e le due Equazioni *di condi-*

zione per l' *equilibrio*, appellando colla sigla f la *coesione* qual ch' ella sia delle parti.

$$P\,\text{Cos.}\theta = F\,\text{Sen.}\theta - \frac{p\,\text{Sen.}\theta + F\,\text{Cos.}\theta}{n} - \frac{fa}{\text{Cos.}\theta}$$

$$F\,\text{Sen.}\theta = p\,\text{Cos.}\theta + \frac{p\,\text{Sen.}\theta + F\,\text{Cos.}\theta}{n} + \frac{fa}{\text{Cos.}\theta}.$$

Dalla seconda deducesi $F = \frac{p}{\text{Tan.}\theta} + p + \frac{\frac{F}{\text{Tan.}\theta}}{n} + \frac{fa}{\text{Sen.}\theta\,\text{Cos.}\theta}$, che dà il *maximum* della *pressione* nella cui *formola* l' angolo θ resta *incognita* ancora. Dunque simbolicamente scritta $\phi(\theta)$ la *formola* istessa, se pongasi $\frac{d\phi(\theta)}{d\theta} = \infty$, s' avrà una nuova aggiunta Equazione del *minimum* di F, mercè dei quali due *limiti*, *eliminata* la *variabile* θ, ne proverranno il valore di θ e quello di a, così che se la *pressione* relativa ai *voussoirs* sia espressa mediante una *Fūnzione data* di x, si risolverà parimente riguardo a questi la proposta Quistione; ben intendendo che il *parallelo* dei due Problemi non resta rotto o infermato perchè la *pressione* agisce nell' uno in senso contrario dell' altro.

Vuolsi avvertire però che col fine di guidare gli Artisti nella fabbricazione stabile delle volte non è semplificata, ed alla portata comune quanto bisognerebbe che fosse ne' suoi ultimi resultamenti la precedente Teorica, e che tornerebbe più presto in acconcio appigliarsi al partito d' offrire alla vista degli Architetti una Serie o Famiglia di Curve adattabili ad ogni caso speciale pratico d' Arco o di Cielo da costruirsi, e ben disegnate per loro norma; Famiglia, i cui *rami* procedenti da un medesimo *stipite*, come i rampolli diretti o collaterali degli Alberi genealogici, riconoscessero per propria origine o generazione parziale ciascuno dei Dati o delle Misure particolari, da considerarsi dietro lo stile degli Algebristi come altrettanti *Parametri* nel passaggio dall' Equazion *generale* all' Equazione *applicata* a questo o quel caso individuale, o come altrettante *Scale di variazione*. Un saggio di questo

Sistema *grafico* di Linee curve della stessa Famiglia, benchè di varia grandezza e fisonomia, senza mancare a tutto il corredo del Calcolo, lo riserbo al termine del mio Discorso, ed ora colla sola veduta di preparar l'animo dei Leggitori al più facile intendimento di come si possa render presente all'occhio il proceder d'ognuna, e il complesso di tutto quell'immenso fascio di Curve contenute nell'Equazione *generale*, via-via congenite, e pertinenti alla Prosapia medesima, mi propongo d'accennare in succinto la maniera di delinear quelle, che solamente si riferiscono ai *Piè-diritti*. Il perchè, a causa d'esempio, ritornando al modo *approssimativo* e ipotetico di trattare questa materia impiegato dal Delahire, e seguitato dal Belidor nei luoghi di già citati, comincerò dal ridurre l'espressioni Analitiche dell'*Equilibrio*, che abbracciano tutti i *Dati* primitivi, ed indispensabili di sì fatta ricerca, a quantità dipendenti dai *centri-di-gravità*, difficile ad indagarsi, dei *cunei* tronchi e loro scambievoli unioni componenti la Volta.

Supposero i due Francesi Geometri che ogni Cielo a *mezzabotte* propendesse a rompersi sempre dall'una e dall'altra banda presso ai 45.° dal colmo; così che, posto ciò come certo per esperienza, sarebbe la stessa cosa che immaginare la parte superior della Volta simile ad un gran *cuneo* incastrato tra le due rimanenti parti laterali della medesima, il quale tendesse a sfiancarle, e rovesciarle legate insieme coi *Piè-diritti*. Ma ciò sia pur vero, come sembra almeno manifestarlo il punto del *maximum* della *pressione* testè notato, qual si rinviene mediante $\frac{dF(x)}{dx}=0$, che da $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ nel caso preindicato del Semicerchio. Non perciò addiverrebbe l'istesso nè lo potrebbe ogni volta che si facesse *scema* la Volta (*surbaissée*), poichè lo dimostra l'assurdo, al quale anderebbesi incontro collo *scemar* sempre il *rigoglio*, sino al segno che giunti alle così dette *Volte-piane* (Fig.ª 6.ª) bisognerebbe pur dire che la *pressione* s'esercitasse dalla sola sua parte AM*ma* sopra M*m*, e che M*mb*B rimanente null'altro fosse che un'

appendice oziosa connessa a tenuta col *Piè-diritto*, la qual conseguenza del primo assunto a Belidor comparve sì strana, che sebben devoto al medesimo per tutti i casi possibili degli Archi semprepiù *scemi* fece quì saltuaria un' eccezione alla regola per l' *Arco-piano* (*plate-bande*), e disse chiaro che *tutta* la sua metà AB*bu* preme B*b*, e spinge contr'esso senza parlare altrimenti di *rottura* intermedia. Quindi è che, se mai luogo vi fosse ad accettar per facilità, e con qualche fiducia il divisamento di Delahire, ragion vorrebbe che questa Dottrina in generale *approssimativa* si ristringesse alla *Mezzabotte* perfetta, ed alle Volte vicinissime a questa. Scrivendosi allora A (Fig.ª 13.ª) pe 'l peso o area pesante DGFC, *h* per l' altezza del *Piè-diritto*, x per la sua grossezza (*epaisseur*) ed essendo Q il *centro di gravità* di BCFE, R la *projezione* verticale di esso, il Principio solito della *Leva* addita tosto qual sia l'Equazion necessaria per lo stato dell' *Equilibrio*, vale a dire $A.PO = \frac{x^2 h}{2} + A.RP$, ovvero, ponendo g per Rs, f per OP—B'V, e L il punto di mezzo o *centro di gravità* di CF, $Af - Ax = \frac{hx^2}{2} + Ax - Ag$. Sifatta Equazione che coincide appuntino colla stampata da Belidor nell' Opera teorico-pratica, di cui innanzi io parlava, null' altro ha di fastidioso preparativo se non che la ricerca della posizione del punto Q *centro di gravità* della *zona* od *armilla* segnato nella Figura: ma questa posizione somministrandola le note *Formule centrobariche* per mezzo del raggio r del sottarco, della data grossezza a della *Mezzabotte*, e di Π rapporto costante d' ogni Circonferenza circolare al proprio Diametro, ed inoltre dal Calcolo derivandosi

$$x = -\frac{2A}{h} \pm \sqrt{\frac{4A^2}{h^2} + \frac{(f+g)2A}{h}}$$

$$A = \frac{\Pi}{8} a (a + 2r)$$

$$g = 8\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3\Pi} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \cdot \left(\frac{3r^2+3ar+a^2}{a+2r}\right) - r\,,$$

cioè la *ridotta*

$$g = 0,\ 545\left(\frac{3r^2+3ar+a^2}{a+2r}\right) - r\,,$$

$$f = \frac{a+2r}{1,414} + h - r\,,$$

$$f+g = \left(\frac{0,654r^2+3,482ar+1,770a^2}{1,414(a+2r)}\right) + h\,,$$

proviene dopo le debite sustituzioni la dimandata *grossezza* SP ossia BZ del *Piè-diritto* $x = -0,\ 785a\left(\frac{a+2r}{h}\right) +$

$$+\sqrt{0,616a^2\left(\frac{a+2r}{h}\right)^2 + (0,398r^2+1,933ar+0,932a^2)\frac{a}{h} + 0,785a(a+2r)}$$

ond' essere capace di sostenere l' urto o la spinta *sorda* dell'Arco; la qual *grossezza*, se minor si facesse, darebbe a conoscere il grado della *tensione* latente d' una *catena* opposta lungo la *corda* per reggerlo, in armonia col suo tuono quando venisse percossa.

Applicabile ella è questa foggia di risguardar l'*Equilibrio* a molte supposizioni particolari di *Mezzebotti* senza discostarsi dal metodo di Delahire assunto in esempio: gioverà, a mio parere, per l'esercizio degli Artisti, e pe'l comodo della Pratica trasceglierne quelle poche, che seguono, come d' uso più frequente nel fabbricare.

I.° Sia la *Mezzabotte* coperta con un ripieno in piano andante orizzontale, quali sono difatto i *pavimenti* delle Camere in sulle Volte, e le *carreggiate* dei Ponti quando non abbiano necessità d' aver *montate* o *pedate*. Se A rappresenti l'area ponderosa CDGW, e c rappresenti BV, dovrà farsi la (Fig.ª 14.ª)

grossezza del *Piè-diritto* $x = -\frac{A}{h} \pm \sqrt{\frac{A^2}{h^2} + \left(\frac{f-c}{h}\right)2A}$, ovvero $x = -\frac{(a+2r)^2}{2h} + \sqrt{\frac{(a+2r)^4}{4h^2} - 0,\ 292\,\frac{(a^3+3a^2r+4ar^2+2r^3)}{h} + (a+r)^2}$

denotando h l' altezza contata dalla linea orizzontal superiore, ed a la solita lunghezza DG della *chiave*, fermo stante tutto il resto che sopra.

(Fig.ª 15.ª) II.° Abbiasi ora la Volta coperta, come suol dirsi, *a frontespizio* o *a capanna:* l'Equazione generale esposta di sopra

$$x = -\frac{2A}{h} \pm \sqrt{\frac{4A^2}{h^2} + \frac{(f+g)}{h} 2A}$$

darà tosto il valore di x se in luogo di 2A sustituiscasi $a^2 + 2ar + 0,646r^2$ (essendo $a =$ CF *grossezza* della Volta misurata a' suoi reni), ed in luogo di $f+g$ si surroghi $\frac{a^2r + 1,646ar^2 + 0,293r^3 + 0,666r^2}{1,414(a^2 + 2ar + 0,646r^2)} + h$, tenuti fermi gli altri segni e lettere rappresentative, e ridotta alla sua massima possibile semplicità la derivante espressione Analitica.

(Fig.ª 16.ª) III.° Se poi il *Piè-diritto* sia spinto da più Volte o Archi ad un tempo o cospiranti o in contrasto l' un l' altro, non dee che ripetersi la stessa *Formula* dietro ai *dati* di ciascun Arco *a mezzabotte* perfetta, tanto quanto importa il numero delle Volte. Tutto allora dipende dall' agguagliare la *somma* dei *momenti* delle *pressioni* di ciascun Arco nel punto di 45.° (o in quel torno), che spingono per una banda, ai *momenti* di quelle *Forze* riunite, le quali spingono per l' opposta. Ma fa di mestieri osservare oltre a ciò che i piccoli Archi s' incastran sovente nei loro estremi, e vi muoiono facendo parte *integrante* del *sodo* del *Piè-diritto*, di tal maniera che, quando voglia starsi a tutto rigore, la porzione dell' Arco IFE, a causa d' esempio, che addenta o morde nel suo lato destro il *Piè-diritto* ABCD, bramando contarla piuttosto nella massa di questo, rimarrebbe la sola parte EGHI da essere calcolata in conto dell' Arco. Belidor con tutta franchezza omette questa porzione EGHI come se difatto non esistesse, quantunque la consuetudine invalsa di tali incastri presso a poco porti a tagliare colla linea o spigolo IE per metà l' area dell' *ottante* annulare EFHG; ma invece d' ometterla mi par meglio contar due volte IFE, sì per

causa di star sempre a vantaggio nella certezza dell' *equilibrio*, sì ancora per non disturbare la simmetria della *Formula* Algebrica, che considerati gli Archi piccoli a par dei grandi riduce il Problema d' un complesso di più Archi al semplicissimo caso d' un solo. Ed il vero nell' Equazion *generale* notisi colla lettera M il *numeratore* del termine innanzi al *radicale quadratico*, e colla N l'altro situato dentro del *radicale*, il *denominatore* del qual termine è h talmentechè l'espressione diventi $x = -\frac{M}{h} \pm \sqrt{\frac{M^2}{h^2} + \frac{N}{h} + M}$. Sien ora i *Dati* di ciascuna delle singole *Mezzebotti* situate da un lato stesso del *Piè-diritto* r', r', r''', ec. a', a'', a'', ec. h', h'', h''', ec. e viceversa quelli delle *Mezzebotti* dal lato contrario $'r$, $''r$, $'''r$, ec. $'a$, $''a$, $'''a$, ec. $'h$, $'h$, $'''h$, ec. secondo il novero delle *Volte*. Facilissimo egli è il concepire che indicandosi col medesimo mezzo degli *apici* posti a destra e a sinistra le separate *espressioni* particolari M, N pertinenti ai singoli respettivi Archi del sistema proposto, la *dimensione* della grossezza cercata del *Piè-diritto* riesca

$$x = -\frac{(M'+M''+M'''\text{ec.}-{}'M-{}''M-{}'''M\text{ ec.})}{h} \pm \sqrt{\frac{(\ )^2}{h^2} + \frac{N'+N''+N'''\text{ec.}-{}'N-{}''N-{}'''N\text{ ec.}}{h} + (\ )}$$

ove ho lasciate vuote le due caselle, che ognun sa riempire di per se stesso comunque poco addestrato ed esercitato nel Calcolo, bastandomi che manifesto apparisca come quest'ultima *espressione* mantenga siffatta forma, ed abbia una cognazione strettissima colle tre precedenti, come l' ultima stessa contenga in ventre le altre, e come finalmente in sostanza, salvo il Calcolo più men prolisso, tutti questi Problemi più o meno spogliati o vestiti di circostanze o accidenti si riducano a un solo, e sempre la loro risoluzione abbia in mira d' assicurarsi di un avvantaggiato *Equilibrio*.

IV.° Oltre ad uno o più Archi, le cui *spinte* congiurino o si contrarino, o ignudi che siano o in questa o in quella guisa ammantati, s' aggiunga loro di più un *Terrapieno*. Le *gravità specifiche* del *muro* (*maçonnerie*), e della *terra* (*massif*

de terre), secondo la varia specie, e composizion d'amendue, sien denotate dai numeri Π, π, cioè da 1 e $\frac{\pi}{\Pi}$, che sarà l'unico *coefficiente* da introdursi di uuovo per la giunta Analitica qualificativa della *spinta* della *terra* a confronto di quella del *muro*. Nota l' altezza h del *terrapieno*, nota la scarpa (*talud*), in cui dispongasi il *terrapieno* medesimo conforme alla sua special qualità e compressione, e nota eziandio la *tangente* t della metà dell'angolo del profilo della *scarpa* sua propria colla verticale, si sa d'altronde che $\frac{1}{3}\frac{\pi}{\Pi}h^2t^2$ è il *momento* della sua *spinta*. Dunque in tutti i casi premessi

$$x = -\frac{M}{h} \pm \sqrt{\frac{M^2}{h^2} + \frac{N}{h} + M - \frac{\pi h^2 t^2}{3\Pi}} \quad ; \text{ dove}$$

1.° per la *Mezzabotte* nuda

$M = 0,785a(a+2r)$, $N = (0,398r^2 + 1,933ar + 0,982a^2)a^2$;

2.° per quella con coperta piana

$M = 0,5(a+2r)^2$, $N = 0,292(a^3 + 3a^2r + 4ar^2 + 2r^3)a$;

3.° per la medesima a capanna o *a remenato* in angolo retto

$M = a^2 + ar + 0,646r^2$, $N = 0,707a^2r + 1,164ar^2 + 0,207r^3 + 0,471r^2$;

senza bisogno di dire che nell'unione di più Archi o Volte, che cospirino o si contrastino agendo insieme sul *Piè-diritto* posti per r, a, h, quei valori, che s'appartengono alle dimensioni di ciascheduna, subentrano alle M, e N della *formula* le M', M'', ec., N', N'', ec., 'M, ''M, ec., 'N, ''N, ec. *additivi* i primi valori, e *sottrattivi* i secondi.

A coronare col mezzo di ben delineate Figure la sposizione premessa, non tanto semplice veramente e compiuta quanto alla volgar Pratica si converrebbe, testè proponevami d'invitare in sussidio ed utile dei Fabbricanti il modo, che tengono gli Algebristi in circostanze consimili o di Regole difficultose nell'applicarle, o d'Equazioni tra molte *variabili* indipendenti, comprese però quant'ai loro valori incogniti fra certi determinati confini. Ogni Equazione così ri-

soluta *graficamente* ha il suo *Disegno* particolare, il suo *Modello* corrispondente all' indole, al carattere, alla specialità insomma della medesima, ed è sempre oltracciò accompagnata dalla sua *Scala di proporzione*. La Geometria facilmente si presta mediante una Linea a *disegnare* qualunque individuale Equazione tra due *variabili;* con una Superficie riesce a comporre il *Tipo* d' un' Equazione fra tre *variabili*; ed associandovi la Meccanica *rappresenta* per mezzo degli attributi del Moto quella di quattro *variabili*, e così discorrendo d' un maggior numero di queste coll' introdurre la considerazione d' altre qualità fisiche dei Corpi riunite alla loro estensione o località nello spazio. Ma più latamente un' Equazion risoluta qual ch' essa siasi $y = F(a, b, c, \text{ec.})$, dove a, b, c, ec. indipendenti tra loro fossero tali da potere ricevere ciascheduna innumerevoli valori, ma che non oltrepassassero certi *limiti* in più od in meno, *dipingerebbesi* per mezzo d'una Famiglia di Linee col far *variare* a parte or questa or quella delle *variabili* contenute nel secondo *membro* dell' Equazione, e risguardando frattanto tutte le altre come *parametri*. I salti o gradi delle *variazioni*, perchè la *dipintura* riuscisse più che possibil sia consimile al vero in ogni caso pratico particolare, farebbe mestieri che si assumessero proporzionati alle respettive *limitate* grandezze di quelle *variabili*. Nella Figura 17.ª, a causa d'esempio, denotando a il raggio d' una *Mezzabotte*, b la grossezza, se si facesse *variare* il primo da 1 a 20 *metri* per la *gradazione* di 0, 5 in 0, 5, la *variazione* della seconda dovrebbe procedere tra 0, 5 e 1, 5 *metri* con passi di *decimetro* in *decimetro* come vuol l' indole della Volta; e così segnatasi AB per limite *massimo* rappresentanti i 20 *metri* e divisa in 40 parti eguali, ed AC posta *a squadra* di un *metro*, e divisa in 10 le Curve di relazione con questi *Dati* delineate soddisfarebbero ad ogni caso come *v. gr.* se al raggio di nove *metri* corrispondesse la grossezza di 7 *decimetri*, PM sarebbe la y, e mM la Curva o *Luogo* geometrico o, per così dire, il *Ritratto* dell'Equazione.

Qualora però si dovessero far *variare* ad un tempo medesimo più dei divisati *parametri*, questa *variazion* simultanea romperebbe la *continuità* del Disegno, recherebbe imbarazzo e fastidio, s' intreccierebbero, si confonderebbero, e cotanto mostruosamente disformerebbonsi i *segni* tracciati o per lo meno indistinte cotanto apparirebbon le *Linee*, che non sarebbe valevole in così gran moltitudine e affollamento a ben sceverarle nemmanco un occhio linceo. Pur tuttavia non manca rimedio a tale disorbitanza onde non dover rinunziare al comodo insigne (massimamente rispetto alla Pratica delle Arti) della costruzione *grafica* delle Equazioni, e soprattutto di quelle, che l' Analisi stessa non ha saputo sino ad ora risolvere. Fo intanto riflettere che in Dipinture siffatte i *rotti*, le *potenze*, ed altre *espressioni* delle grandezze son sempre *numeri*, e perciò si costruiscono *lineari* perchè riportate alle *Scale di proporzione:* aggiungo che i *radicali* (*numeri* anch' essi) possono facilmente scansarsi considerandoli a parte mediante la traccia, di segno, o *tratteggio* d' un' altra Curva, qual sarebbe la *Parabola* universale $y^m = x$, avendosi allora $y = \sqrt[m]{\phi(a, b, c, \text{ec.})}$ cosicchè l' Equazione proposta si traformerebbe in $x = \phi\ (a, b, c, \text{ec.})$: e voglio avvertire eziandio che del numero m di *radici* dell' *unità* tutte l' altre fuor d' una non trovan mai luogo nè considerazion nella Pratica. Prendasi dunque della *ridotta* $y = \mathrm{F}\ (a, b, c, \text{ec.})$ per *ascissa* a, e restino l' altre *numeriche* linee *parametri*. Tornerà sempre bene prescegliere per *ascissa* quella, nella di cui *espressione* la maggior *potenza* sia la minore rapporto all' altre; poichè così la Curva *tracciata* riesce d' *ordin* più basso; eccettuato il caso, da valutarsi moltissimo in Pratica, che talun dei *parametri* avesse più estesi i suoi *limiti*, e *variar* dovesse per *gradi* più stretti in confronto degli altri, perchè allora sarebbe utile assai preferirlo onde diminuire il numero delle Curve da *disegnarsi*. Sien dunque a l' *ascissa* prescelta coll' avvedutezza indicata, b il 1.° *parametro variabile* considerato, e c' il valor

dato particolare a C, per ora *costante*, e segnatamente il più piccolo de' due suoi *limiti:* dipingasi il *tratto* del tronco di Curva $y=F(x, b, c, \text{ec.})$ compreso tra i noti estremi di x e tanti di questi *tratti* si segnino quanti valori diversi debba ricevere b o per quanti *gradi* deggia progressivamente salire da un *estremo* all' altro suo *limite;* ed ecco una Famiglia di Curve della medesima origine, composta d' altrettanti Individui quanti sono i *gradi* enunciati. Ora colla Figura 18.ª sulle due *Scale* normali di *variazioni* di a, e di b e col *parametro minimo* c' generata la detta Famiglia, i valori innumerevoli di y non avranno *legge* determinata salendo o scendendo di Curva in Curva M, M, M, M, ec. BC sarà il *massimo* valore di y, BC' il *minimo;* laonde, se di C'C o D'D si faccia altra *Scala di variazione* di modo che ogni valore di y, *v.gr.* PM, cada in E punto della divisione, allora mediante la terza *Scala di variazione* di c disegnerebbesi un'altra Razza di tronchi di Curve N, N, ec. composta di tanti Individui quante sono le parti eguali della nuova *Scala* di y, ed in queste Curve troverebbonsi i valori P' N' di y corrispondenti ai valori di a, b, c, tutte tre grandezze *variabili* dentro ai respettivi *limiti* convenuti. E difatti si voglia rintracciare *graficamente* ed in piano (poichè fuor del *piano* potrebb' esserne *Tipo* una *Superficie*) il valore speciale *numerico* di $y=F(a', b', c', \text{ec.})$, il valor *massimo* della quale è B'F: presa a nella *Scala* di a, conducasi l' *ordinata* $a'\,m$ della Curva, che si parte da b' nella *Scala* di b; il punto m col *Compasso* trasportisi in n espresso il valore di c' nella *Scala* di c menisi nella Curva nN l'altra *ordinata* $c'\,n'$, che risolve il Quesito. Ognun vede il procedimento, che sarebbe d' uopo seguire se s' aggiungesse una quarta o più altre *variabili* all' Equazione $y=F(a, b, c, d, \text{ec.})$ considerate in prima come *costanti*, e consisterebbe in una più estesa concatenazione di parecchie successive generazioni di quelle imparentate Prosapie di Curve, le quali meglio si scorgono *disegnate* alla foggia degli Architetti che *meditate*, non diversamente da ciò, a che Degua,

Lagrange, ed altri Analisti perspicacissimi non han potuto a meno di non ricorrere pel rischiaramento d' alcune delle proprietà generali dell' Equazioni, alla risoluzion delle quali (e nominatamente di quelle nello stato attuale dell' Algebra irresolubili) non disconverrebbe, a mio senso, adattare il *Compasso* nel modo, che adesso vo quì di passaggio accennando.

Ell' è *forma* universale d' ogni Equazione, ove i *coefficienti* che abbracciano tutti i *Dati* a, b, c, cc. d'un Problema qualunque proposto a risolversi, o sono numerici o numericamente colle debite *Scale* rappresentabili nell' applicazione loro alle Arti, e non han *segno* assoluto, ma dipendente dalle circostanze particolari, che or *positivo* lo vogliono, or *negativo* del tutto, ora *diverso* nelle lor parti,

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} + \dots\dots\dots\dots + T = 0 ;$$

la quale, se si separino generalmente le parti di *segno* contrario in ciascheduno dei *coefficienti*, diventa

$$\left.\begin{array}{l} y^m + P'y^{m-1} + Q'y^{m-2} + R'y^{m-3} + \dots\dots\dots\dots + T' \\ \quad - P''y^{m-1} - Q''y^{m-2} - R''y^{m-3} - \dots\dots\dots\dots - T'' \end{array}\right\} = 0.$$

Rendesi dunque necessario trovare un valore dell' *incognita* y (*reale positivo*, e ristretto sempre tra *limiti conosciuti* mercè dell' indole particolare della Quistione, come trattandosi *v. gr.* della grossezza (*epaisseur*) d'un *Piè-diritto*, sarebbero $\frac{1}{2}$ e $1\frac{1}{2}$ *metri* (e più stretti ancora)) col tracciare due tronchi di Curve del *Genere Parabolico*, usate prima di tutti ad altro fine da Newton nel suo Calcolo *Differenziale*, e riportarli alla limitata *ascissa* AB, cioè (Fig.[a] 19.[a]) CD, e C'D', la prima Curva rappresentante *graficamente* l' Equazione *indeterminata*.

$$z = y^m + P'y^{m-1} + Q'y^{m-2} + R'y^{m-3} + \dots\dots\dots\dots + T'.$$

e l' altra

$$z' = \quad P''y^{m-1} + Q''y^{m-2} + R''y^{m-3} + \dots\dots\dots\dots + T''.$$

Dove questi due *Luoghi Geometrici* intersecherannosi in M, ivi daranno a conoscere per mezzo dell' *ordinata* comune MP referita alla *scala* medesima delle a, b, c, ec. il cercato valo-

re di AP, cioè y sull' *asse* delle *ascisse*, il qual valore, fermo sempre stante l' istesso modo di costruzione, respettivamente otterrassi per ogni specialità dei valori innumerevoli, di qualunque maniera tra lor combinati, a', b', c', ec. a'', b'' c'', ec. che dar si volessero alle *costanti.*

Trasporterò in conseguenza sì fatto metodo all' Equazione segnata di sopra, che concerne la *grossezza* del *Piè-diritto*, onde resistere validamente, e un poco più del bisogno, allo sforzo della Volta, che vi s' imposti, mettendo m, n, p, q, in vece dei *numeri* coefficienti, che per ogni caso restano nella *formula* del secondo membro sempre i medesimi, e vale a dire alla

$$y=-ma\frac{(a+2r)}{h}+\sqrt{m^2a^2\frac{(a+2r)^2}{h^2}+(nr^2+par+qa^2)\frac{a}{h}+ma(a+2r)}.$$

Primamente come *unità* prendasi h, e si costruisca frattanto la parte *razionale* di y, cioè ma^2+2mar, ponendo a per ascissa *variabile* di o, 1 in o, 1 da $\frac{1}{2}$ sino a 1 $\frac{1}{2}$, e perciò divisa in 15 parti eguali conforme al detto di sopra, e contando r per *parametro*. Nasce così per qualunque valor *costante* di r una Linea di *Genere Parabolico* (Fig.[a] 20.[a]), e quinci un Sistema di tante di queste Linee BM, BM', ec. riportate al comun *asse* BA delle *ascisse*, quant' è il numero dei venti valori, che consecutivamente si diano di $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ da 1 sino a 10 al *parametro* r fatto *variare* di Curva in Curva. E *disegnate* in tal modo per via di punti più o men serrati, e quanto piaccia tra loro vicine quelle *Parabole*, è manifesto che notando il valore di a sulla sua *scala* in x, e l' altro di r sulla propria fra i *limiti* stabiliti in P, l' *ordinata* XY, postasi col *Compasso* sulla *scala proporzionale*, farà conoscere $ma(a+2r)$ in numero *razionale*. Adoperando con ordine inverso, vale a dire prendendo prima r *variabile*, ed a *parametro*, alla Famiglia delle *Parabole* subentrerebbe la cotanto più agevole *descrizione* d' un Sistema di *Linee rette;*

e il colpo d'occhio dell'Analista debb'esser sì pronto e spedito da sapere scegliere incontanente per ogni caso particolare la più semplice costruzione. Questa semplificazione importante è mostrata in disegno dalla Figura 21.^{a}, dove AB *asse* delle *ascisse* rappresenta *r* in 20 parti eguali diviso, AC″ *scala* dei quadrati di *a*, che procede di $\frac{1}{10}$ in $\frac{1}{10}$, disegualmente divisa in $\frac{1}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{16}{100}$, ec. dentro ai suoi due *limiti* estremi sopraccitati, e le rette CM, C′M′, C″M″, ec. sono talmente segnate che le *tangenti* dei loro angoli con AB vengano ad essere $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, ec. sino a 3, ultimo termine loro; cosicchè per AX ed AC′ misurate sulle due *scale* troverassi col mezzo dell'*ordinata* XY, che vada a ferire la corrispondente *Retta* intermedia C′M′, il valor ricercato. Manca adesso di dire il riguardo da aversi al valore di *h* supposto sin quì = 1, ma ancor esso in sostanza *variabile*. Aggiungasi dunque la terza *scala* AD al secondo *Disegno*, che giova anteporre perchè di costruzione più semplice rimpetto al primo, come far si dee in casi simili, e dividasi quella in 20 parti eguali, che si succedano di $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ da 1 sino a 10 inclusive; e se vogliasi ora assegnare compiutamente la *linea* simboleggiante la solita *Formula* $\frac{ma^2+2mar}{h}$ in correspettività anche della terza *variabile h*, null' altro occorre di più ad eccezion del trasporto di XY in AO, e della traccia della *retta* OD, perocchè l' *ordinata* 4Z (se, v. gr., *h*, sia 4, e così sarebbe degli altri valori) adempirà la ricerca.

Nella costruita pocanzi semplicissima *Formula* avrebbe tutta ragion chi dicesse risolverla in *numeri* sarebbe per avventura più breve, e più agevol partito a paragone di quello di costruirla per mezzo di *linee*. Ma non varrebbe l'istesso discorso se si pretendesse applicarlo alla considerazione di *Formule* intrigatissime, che pur vorrebbonsi saper risolvere co-

modamente mediante un *Cartone* delineato con tutta esattezza, col porsi in tal modo a profitto delle Arti, ed alla portata di tutti gli Artisti, cui non rincresca di maneggiare le *Seste*. Ognuno poi vede senza bisogno dell' altrui scorta la maniera analoga da seguitarsi per ottenere parimente *grafiche* le *misure* dei *termini* rimanenti $\frac{m^2a^2(a+2r)^2}{h^2}$ (quadrato del già costruito), $\frac{a(nr^2+par+qa^2)}{h}$, e finalmente $ma(a+2r)$, ch' è il medesimo conseguito in principio, ma scevro del *divisore*; i quali tre *termini* stanno dentro del *segno radicale quadratico*, o per l' effetto di costruirli conducono a dover *disegnare*, presa a per *variabile*, un Sistema di *Linee* di 2.° e di 1.° *grado*. Vano sarebbe diffondersi più latamente col cumulare altri esempj, i quali non ripeterebbero insomma se non che le *grafiche* operazioni medesime modificate dalle circostanze particolari dei diversi Problemi da sciogliersi nella Statica delle Volte, o altrettali, che in altre parti delle Facoltà Matematiche, e delle loro congiunte Discipline severe giovasse rendere maneggevoli in pratica, meno intellettuali che *tecniche*, esposte più che al giudizio della mente alla destrezza dell' esercizio dell' occhio, ed a portata di tutti coloro, i quali abbiano nitide le prime idee della traduzione dell'Algebra *letterata* in Algebra *figurata*. Basti dunque per tutte il *Disegno-campione* (*l' Épure*), che ho messo in essere con molta pena nella 22.ª Figura a compimento del Problema assunto in esempio, il quale s'aggira sulla ricerca della *grossezza del Piè-diritto*, seguendo però l' imperfetta Teorica, cui si appigliarono i Geometri precitati Francesi col fine sempre lodevole di facilitarne i resultamenti.

SPIEGAZIONE

Le tre coppie di Famiglie di Curve contrassegnate dalle lettere X, Y, Z, imitatrici fedèli del procedimento *De Curva in Curvam* immaginato da Leibnitz, e fonte primario del

Calcolo *Differenziale*, e *Integrale*, e di quel delle *Variazioni* (Vol. V. pag.^{a} 131. (*a*) (*b*) e 154.), si riportano ai tre casi diversi delle Volte o dei Cieli conformati *a mezzabotte*, siccome è scritto di fronte.

In ciascuna di queste Famiglie o Sistemi di Curve quello, ch' è a dritta di chi lo guarda, e della *scala* dei raggi, dà in linee *rette* il valor *grafico* del *termine* primo o *razionale* della *Formula*; laddove l' altro a man manca somministra, parimente *grafico*, il *termine* intermedio dei tre contenuti dentro del *radicale*, cioè il *termine* unico, ch' è di composizione affatto diversa dal *razionale* indicato.

Sta sopra a quelle Famiglie di Curve la *scala* delle altezze dei *Piè-diritti*, destinata alla *riduzione* dei valori *grafici* ottenuti dapprima in linee *rette ordinate*, e quinci *ridotti* a proporzione della varia misura *effettiva* delle altezze assegnatesi.

La *Parabola* Apolloniana AVS', che corona a destra i Sistemi di tutte le Curve predette, le quali sono visibilmente del *Genere Parabolico* di vario *grado*, serve unicamente all uopo di conseguir *grafico* anch' esso il *termine irrazionale* della medesima *Formula*, cui si riferisce la costruzione presente *geometrica*, e torno a dir somministra la *radice quadra* del complesso o coacervato dei tre *termini*, che son racchiusi dentro il *segno* della *radice*.

Finalmente in aggiunta si scorge chiaro a sinistra, ed in cima a tutto questo *Disegno Campione* (o Matrice, o *Piattaforma*, quale appunto l' appellerebbero i Fabbricatori d' Orologj, e di Strumenti architettonici, geodetici, ed astronomici d' ogni maniera) un ultimo Fascetto di Curve, *paraboliche* anch' esse, dedicate al ritrovamento della forza di *spinta* dei *Terrapieni* onde contrabbilanciarli validamente per mezzo di *Muri*, che gli vestano o foderino, a tenore delle altezze loro diverse, della loro *scarpa* o sdrajo parimente diverso, e delle varie *gravità specifiche* di materiali impiegati, e più o meno compressi di *terra*, e di *muro*. A proposito

del qual manipolo o fascetto di Curve non è da lasciarsi sotto silenzio ch' ei tiene il posto della Figura *delineata* di già da Prony nella sua *Memoria*, che versa intorno a questo stesso argomento, alla cui delineazione egli era stato condotto dalla Teoria antecedente, da esso lui renduta più semplice perchè in vece di *Curve* avea disegnati *Poligoni*. Nè in maniera molto dissimile mi son dilungato alcun poco ancor io in certi particolari della *costruzione* immediata suggeritami dalla puntual Dottrina premessa, come a causa d' esempio, sempre colla veduta di raocorciare o rendere più sensibile o più patente il *Disegno*, s' è in esso tracciata la *Parabola* AVS', non quale volevala la sua Equazion semplicissima $y^2 = x$, ma piuttosto l' *identica* di questa foggia $y = 10 \sqrt{\frac{x}{100}}$ compensando il decuplo dell' *ordinata* col centesimo dell' *ascissa*.

Non sarà ora discaro un corto accenno o un saggio brevissimo del modo d' usare di questo *Disegno-Campione* delineato colla maggior diligenza possibile, e dedotto dai già spiegati Principj teorici, sì come altri *disegnar* si potrebbero coll' accuratezza medesima a lume, scorta, e favor degli Artisti per tutto il restante dei più composti e difficili casi di Statica, che offre sovente negli Edificj di vario carattere l' Architettura Civile, e non tanto di rado eziandio l' Architettura Idraulica, e Militare. Deesi per altro andar molto cauti relativamente al *Disegno* di sì fatte *Matrici* nel dividere, suddividere, e ben distribuire tutto il loro *lineare* tessuto, ad effetto che si dispongano, si contino, e si riscontrino dalla parte opposta dell' *asse*, cioè in direzione contraria riguardo al punto d'*origine* delle *ascisse*, quelle *rette*, le quali deggiano denotare i valori *negativi*, come, a causa d'esempio, verificherebbesi del *termine negativo* della *Formula*, che comprende anco la *spinta* d' un *Terrapieno*, ossia di $-\frac{\pi h^2 r^2}{3\Pi}$, e della *costruzione* Geometrica di quei valori, che rappresentino le *spinte* d' uno o più Archi o Volte *in con-*

trasto, o che agiscano l' une rispetto all' altre in verso contrario sul *Piè-diritto* comune, che le sostenga.

Ecco il concreto del caso, che servir dee d' ammaestramento, e di guida per tutti gli altri possibili

„ Experiéntia, se giamai la pruovi „
„ Ch' esser suol fonte ai rivi di nostre arti „

(Dante, II.° del Paradiso terz. 32), onde saper condursi nell' esercizio di passeggiar colla *Riga*, colla *Squadra*, e col *Compasso* alla mano sopra il *Disegno* accurato dei già descritti Sistemi di *Linee;* il qual uso familiarissimo agli Architetti, che giusta il dettato del Buonarroti aver dovrebbero sempre le *Seste* negli occhi, ben inteso una volta sul seguente unico *Esempio*, non può mai mancare in chi abbia anche mediocre discernimento d' essergli norma generalmente negli altri casi, perocchè in tutti è difatto l' istesso.

Propongasi di ricercare per l'effetto dell' *Equilibrio* qual debba essere la *grossezza* (*epaisseur*) del *sodo* d' un *Pie-diritto* nella congiuntura d' un Arco *a puntofermo* ovver semicircolare concentrico, tanto interno (*intrados*) che esterno (*extrados*) quando il *raggio* del primo sia di 3. *metri*, la *grossezza* dell' Arco o l' *Archivolto* di 1, e sia di 4. l' *altezza* del *Pie-diritto.*

1.° Nel *Sistema* notato X, che si referisce precisamente alla qualificazione e puntualità del caso proposto, dal punto 4. della *Scala* dei *raggi* tirisi l' *ordinata* MM', che vada a finire da amendue le bande alla divisione 1 delle due *Scale* delle *grossezze;* si riporti *a squadra* in NN', e conducansi le rette AN a destra, AN', a sinistra.

2.° L' *ordinata* QH corrispondente al punto 4. della *Scala* delle *altezze* trasportisi da A in R, e di quì in BP' sul perimetro della *Parabola* conica, e poscia sull' *asse* da P' in P''; quinci l' *ordinata* sinistra HQ'' si stenda dal punto P'' al punto P''' seguitando la dirittura dell' *asse* medesimo.

3.° In ultimo adattisi sull' *asse* delle *ordinate* l' *ordinata* estrema P''' S' così trasferita in AS: sarà RS il valor domandato della *grossezza* del *Pie-diritto*, che mediante la *Scala*

destra, segnata a basso di questo *Sistema* particolare X, farà conoscere il valor medesimo in *numeri* come addiviene degli ordinarj Disegni d' Architettura, e di Agrimensura.

4.° Che se poi vi fosse aggiunta la *spinta* pe 'l verso contrario d' un *Terrapieno* (*Massif de terre*) rivestito di *Muro* nella sua faccia esteriore, e il rapporto $\frac{7}{10}$ fosse quello delle *gravità specifiche* della *terra*, e del *muro*, e di 40.° l' angolo della *scarpa* (*talud*) naturale, competente alla qualità della *terra* di fresco rimossa, e lasciatasi in sua propria balìa, e finalmente l' altezza del *Piè-diritto* fosse come sopra di 4 *metri*, allora dal punto 4 di questa *Scala* alzerebbesi l' *ordinata* LK, che andasse a colpir nella Curva, la quale ferisce il punto 7 della *Scala* delle *specifiche gravità*; il punto K recherebbesi in F a distanza eguale da AE; sulla *Scala* degli *angoli* da C punto fermo, ove $CG = 1$, notato il punto di divisione 40, si tirerebbe a questo la retta GI e ad essa da F la parallela FE; indi CE (perchè *negativa*) porterebbesi da P''' in T; da T eleverebbesi l' *ordinata* TV della *Parabola* d'Apollonio; e quella traslatata in AU farebbe conoscere RU, *grossezza* (*epaisseur*(in questo caso speciale del *Piè-diritto* cercata.

CONCLUSIONE.

Tutto dunque riepilogando il transunto delle principali spiegate Dottrine, ed Operazioni concernenti alla Statica delle varie forme de' Cieli, e segnatamente a quella sua parte, che insegna a farli star fermi con sicurezza su i loro appoggi, ed è più importante d' ogni altra in materia dei più suntuosi Edificj, ne deriva apertissima la conseguenza che, o si consideri la non certa appieno Teoria delle Volte divulgata dal Delahire, o si ponga mente alla posteriore più rigorosa dedotta dalle proprietà della *Catenaria* determinatasi in generale dal seniore Clairaut, amendue sieno frutto, ed immediatamente procedano da un Teorema semplicissimo ed ovvio

del Galileo (MDCXXXVIII), e quel che fa più maraviglia, provato col mezzo delle *velocità virtuali* dietro alle traccie di già segnatene da Aristotele, o se si voglia del Fiammingo Simone Stevino (MDLXXXV) rispetto alla *Gravità relativa* sopra un Piano declive, e oltracciò dimostrato dall' ultimo per mezzo d' una *Catena perpetua* imbracata in sulla punta dell' angolo acuto d' un Triangolo ortogonio, libera o sciolta nel resto, comunque lentamente tesa, e faciente *sacca* più o meno aperta in figura d' Arco di Ponte inverso, o come volgarmente si dice *a basto rovescio*,

Possono a tal proposito consultarsi il *Dialogo* III.° ossia la *Terza Giornata* del primo dei Matematici testè nominati, il cui titolo ed argomento si è quello dell' *Altra Nuova Scienza*, cioè *dei Movimenti locali*, allo *Scholium* che segue dopo del Corollario II.° del Teorema o Proposizione II.ª, e ch' è posto in bocca del bravo Salviati, la Meccanica e Idrostatica del secondo tralle sue Opere di *Spartostatica*, *Ponderaria*, *Gypomnemata Mathematica* nelle tre loro Stampe o Edizioni in Fiammingo, in Latino, ed in antico Franzese (MDCV—VIII—XXXIV), come ancora l' *Istoria delle Matematiche* di Montucla nel Tomo II.° Parte IV. Libro III.° §. 1. pag.ª 180. An. VII. della Parigina notabilmente accresciuta Ristampa.

M' intravvenne d' imbattermi presso a poco con pari fortuna in una doppia non avvertita, e direi quasi natural deduzione consimile.

1.° Allor quando il *Triangolo equilatero*, antiquato e notissimo sin dalla nascita delle cose Geometriche, riunitosi all' *armonia* Pitagorica dei *rapporti* numerici, mi condusse per mano (MDCCCIX) a dirittamente svelare qual fosse la vera Curva degli Archi del terzo Ponte ammirabile di Firenze.

2.° Dopochè verso il MDCCXCII. in rileggendo la piccola bensì di volume, ma piena di bei ritrovati e d' ingegno, *Epistola* di Dettonville (Biagio Pascal) a Cristiano Ugenio intorno alla rettificazione di tutte in genere le Cicloidi (*Dimension des Lignes courbes de toutes les Roulettes*) scritta

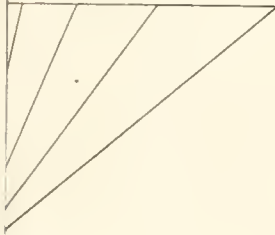
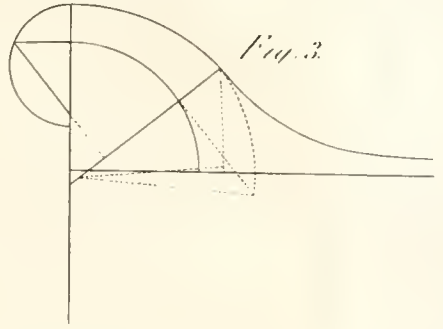
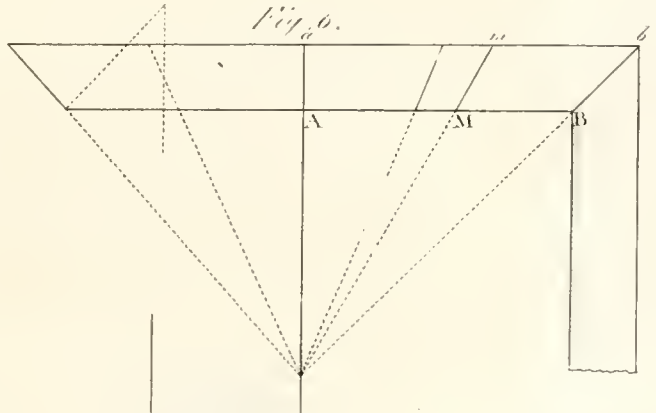
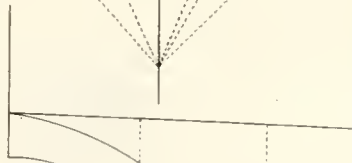



Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 6.
a
u
b
A
M
B
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.

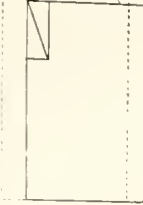



Fig. 1.

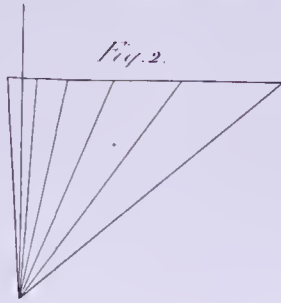



Fig. 2.

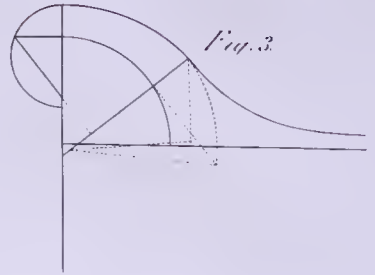



Fig. 3.

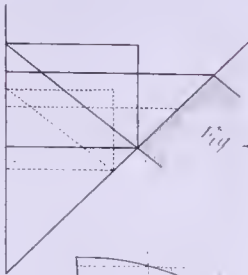



Fig. 6.

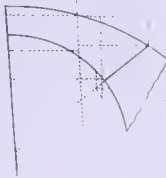



Fig. 5.

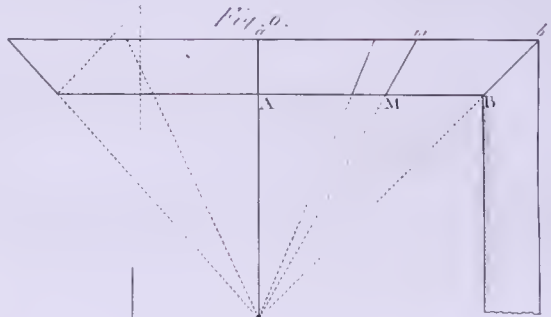
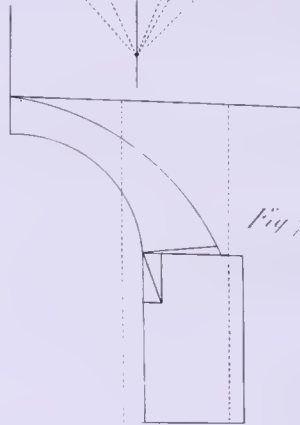



Fig. 7.

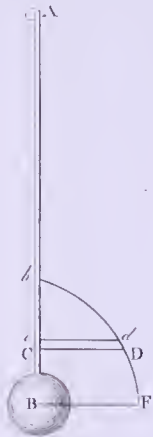
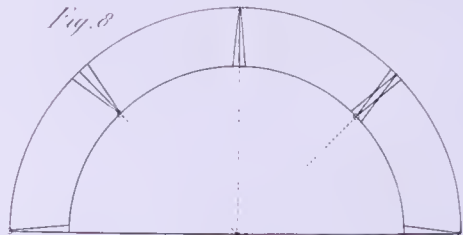
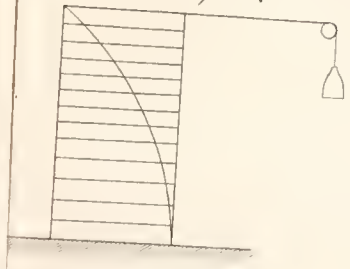
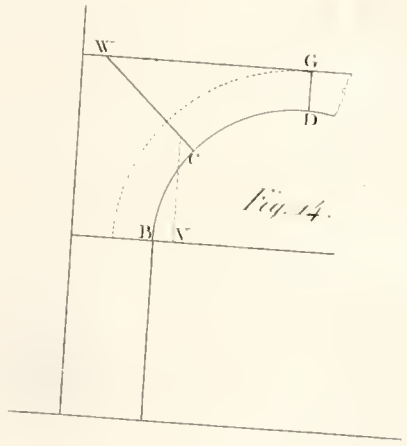
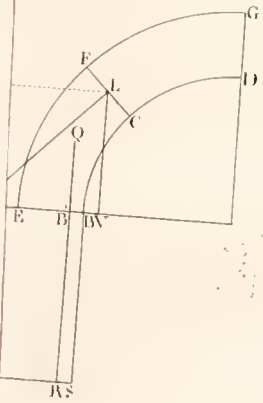
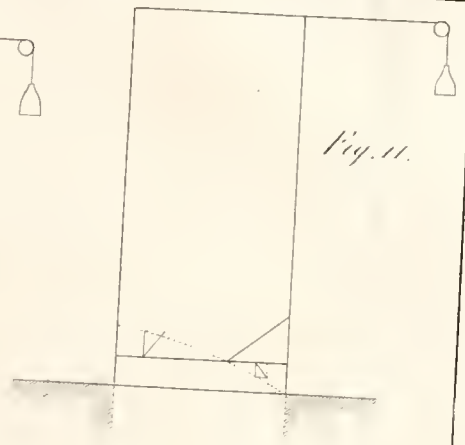



Fig. 10.

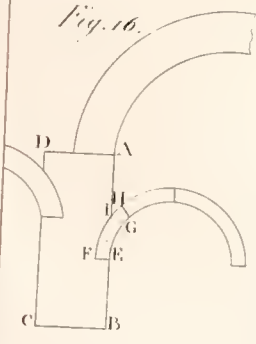



Fig. 11.

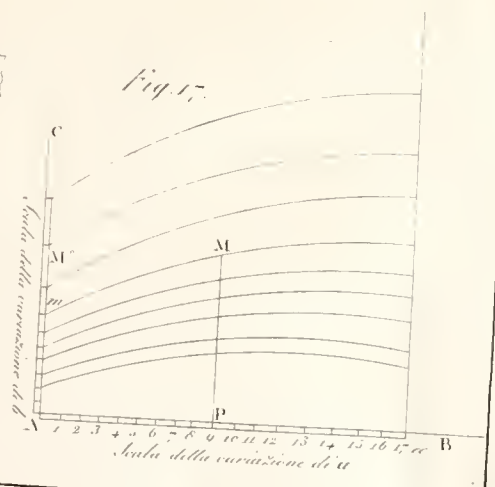
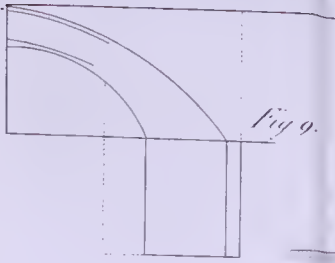



Fig. 14.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 9.

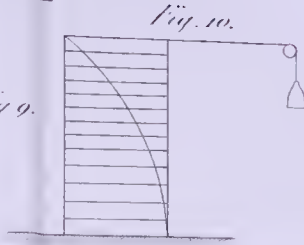



Fig. 10.

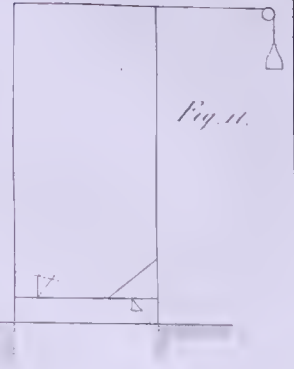



Fig. 11.

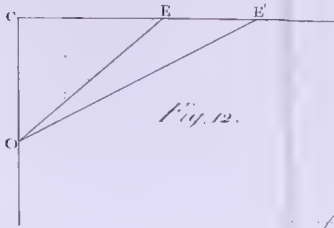



Fig. 12.

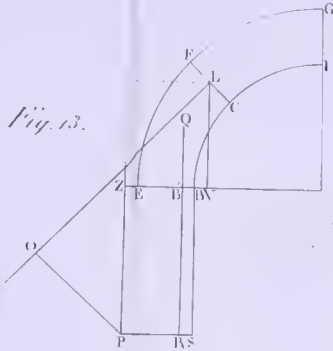



Fig. 13.

Fig. 14.

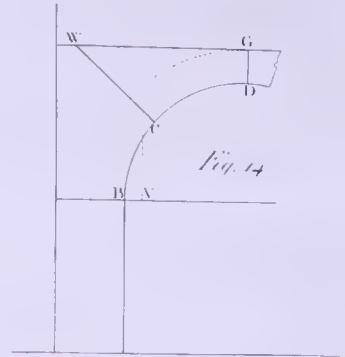
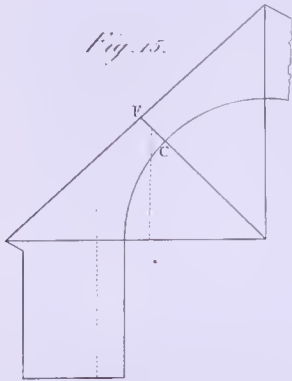
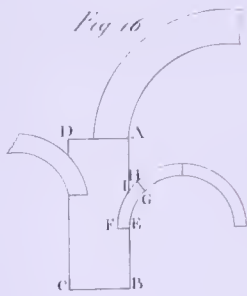
Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Scala della variazione di b

Scala della variazione di a

Fig. 18.
Scala di variazione di u
Scala di C
Fig. 19
Fig. 20
Scala di r
Fig. 21.
Scala di r
TIPO
CONCERNENTE I TERRAPIENI
Fig. 22.
Scala degli angoli
Scala delle altezze
X
VOLTE CIRCOLARI CONCENTRICHE
Scala delle grossezze
Y
VOLTE COPERTE IN PIANO ORIZZONTALE
Scala delle grossezze
Z
VOLTE COPERTE A CAPANNA
Scala delle grossezze

nel MDCLVIII. o in quel torno, e ripubblicata nel Volume V.° della *Raccolta* di tutte l'Opere (ediz.e dell'Haya MDCCLXX), da un egregio Teorema, che vi si trova, e risguarda la *Somma* di tutte le innumerevoli *rette*, che da un punto eccentrico vanno a ferire l'intera *circonferenza* d'un Circolo, mi venne fatto dedurne tutta quella parte sublime del *Calcolo Integrale* dipendente dagli *Archi* delle tre antiche *Coniche Curve;* e ciò mi riuscì d'ottenere con tanta chiarezza, semplicità, e connessione che m'è stato di non poca maraviglia il vedere come Carlo Bossut sì nella sua *Cronica* delle Matematiche Discipline, sì nella Vita minutissimamente circostanziata di Pascal, e recentemente da lui prodotta alla pubblica luce (vedasi, la *Bibliotheque Universelle* T.° IV.° colle stampe di Ginevra del MDCCCXVII.) non abbia creduto suo debito letterario di darne qualche contezza, almen lieve, in augumento di giusto encomio di cotanto grand'Uomo, che si distinse, e si segnalò nobilmente nella lunga lista dei Dotti d'ogni maniera, i quali illustrarono in Francia il SECOLO DI LUIGI DECIMOQUARTO.

SOPRA LA DIPENDENZA TRA I DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI E GLI INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

Di Giuliano Frullani

P. PROF. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI

NELL' UNIVERSITÀ DI PISA

Ricevuta li 4. *Febbrajo* 1818.

PRESENTATA

Dal Socio Sig. Professor Pietro Paoli

E RIVEDUTA

DAL SIG. PRESIDENTE RUFFINI

Ho esposti altrove alcuni nuovi e generali Teoremi sopra la maniera di ridurre i differenziali delle funzioni a dipendere da integrali presi tra certi limiti; ritornando inseguito sopra queste idee medesime mi si sono affacciate alla mente variè riflessioni, che mi sono sembrate poter riescire ai Geometri di qualche interesse. Le ho pertanto destinate ad essere il soggetto di questa Memoria. E per facilitarne ai miei lettori l'intelligenza credo opportuno il cominciare con una succinta esposizione di quei Teoremi medesimi, tanto più che ad alcuni di questi darò in tale occasione una generalità anche maggiore.

I.

Sia primieramente proposto di ridurre in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ la funzione qualunque $F\varphi$ in modo che si abbia

$F\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \text{ec}\ldots +$ $A_h \cos.h\varphi + \text{ec}\ldots + A_n \cos.n\varphi + \text{ec}$. Se moltiplicheremo ciascun membro di questa Equazione per $\cos.n\varphi.d\varphi$, e prenderemo quindi da ambe le parti l'integrale tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, π denotando la mezza periferìa circolare, avremo
$\int F\varphi.\cos.n\varphi.d\varphi = A\int\cos.n\varphi.d\varphi + A_1\int\cos.n\varphi.\cos.\varphi.d\varphi +$
$A_2\int\cos.n\varphi.\cos.2\varphi.d\varphi + \text{ec}\ldots\ldots + A_h\int\cos.n\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi +$
$\text{ec}\ldots + A_n\int\overline{\cos.n\varphi.}^2 d\varphi + \text{ec}$. E dopo questa operazione, il coefficiente del termine qualunque A_h sarà

$$\int\cos.n\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi\ .$$

Ma qualunque numero intero esprimano n, ed h, abbiamo
$\int\cos.n\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi = \frac{1}{2(n+h)}\text{sen}.(n+h)\varphi + \frac{1}{2(n-h)}\text{sen}.(n-h)\varphi + \text{cost}$, quantità che si annulla tra i limiti stabiliti. Conviene per altro eccettuare il solo caso di $n=h$; cercando infatti il valore del termine

$$\frac{1}{2(n-h)}\cdot\text{sen}.(n-h)\varphi$$

allorchè $n=h$, con la regola dataci dal Calcolo Differenziale lo troveremo essere $=\frac{\varphi}{2}$. Sarà dunque in questo caso

$$\int\overline{\cos.n\varphi}^2 d\varphi = \frac{1}{4n}\,\text{sen}.2n\varphi + \frac{\varphi}{2} + \text{cost}.$$

Ed avremo tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

$$\int\overline{\cos.n\varphi.}^2\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\ .$$

Questo pertanto sarà il solo coefficiente che dopo la prescritta operazione non anderà a zero nel secondo membro della equaaioue
$\int F\varphi.\cos.n\varphi.d\varphi = A\int\cos.n\varphi.d\varphi + A_1\int\cos.n\varphi.\cos.\varphi.d\varphi +$
$A_2\int\cos.n\varphi.\cos.2\varphi.d\varphi + \text{ec}\ldots + A_h\int\cos.n\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi + \text{ec}\ldots +$

$$+ A_n \int \overline{\cos. n\phi}^2 \, d\phi + \text{ec.}$$

la quale si ridurrà per conseguenza qualunque sia n alla più semplice forma

$$\int F\phi . \cos. n\phi . \, d\phi = \frac{\pi}{2} A_n$$

dalla quale si avrà

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int F\phi . \cos. n\phi . \, d\phi .$$

E facilmente vedremo anche che il primo termine A sarà dato dall'altra equazione

$$A = \frac{1}{\pi} \int F\phi . \, d\phi .$$

sempre integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$. Con questo metodo pertanto si potranno conoscere i coefficienti dei diversi coseni nella serie

$$F\phi = A + A_1 \cos. \phi + A_2 \cos. 2\phi + \text{ec.} \ldots + A_n \cos. n\phi + \text{ec.}$$

2.

Ciò premesso, proponghiamoci di ridurre in una serie ordinata per le potenze intere, e positive di x la funzione qualunque fx in modo che sia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_n x^n + \text{ec.}$$

Noi avremo dal Calcolo Differenziale

$$a_n = \frac{1}{1.2.3 \ldots n} \frac{d^n fx}{dx^n}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Se adesso nella funzione fx sostituiremo in luogo di x la quantità $e^{\phi\sqrt{-1}}$, si avrà

$$f e^{\phi\sqrt{-1}} = a + a_1 e^{\phi\sqrt{-1}} + a_2 e^{2\phi\sqrt{-1}} + a_3 e^{3\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.} \ldots + a_n e^{n\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.}$$

e sostituendo nella stessa funzione fx in luogo di x la quantità $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, avremo anche

$$fe^{-\phi\sqrt{-1}}=a+a_1 e^{-\phi\sqrt{-1}}+a_2 e^{-2\phi\sqrt{-1}}+a_3 e^{-3\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}\ldots+a_n e^{-n\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}$$

Aggiungendo queste due Equazioni, ed osservando che

$$e^{h\phi\sqrt{-1}}+e^{-h\phi\sqrt{-1}}=2\cos.h\phi$$

otterremo

$$\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}=a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec.}\ldots+$$

$a_n\cos.n\phi+$ ec.

Moltiplicando ora per $\cos.n\phi.\,d\phi$ da ambe le parti, ed integrando quindi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, sarà per l'articolo 1.

$$a=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}\right]d\phi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\left[fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}\right]\cos.n\phi.\,d\phi.$$

Ma si ha, facendo $x=0$ dopo le differenziazioni

$$a=fx,$$

$$a_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}.$$

Onde nelle stesse supposizioni avremo

$$fx=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}\right]d\phi,$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}=\frac{1}{\pi}\int\left[fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}\right]\cos.n\phi.\,d\phi$$

purchè la integrazione sia eseguita tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$.

3.

Molte sono le conseguenze che da questo Teorema discendono. Noi possiamo primieramente estenderlo ad un numero qualunque di variabili, prevalendoci dell' artifizio medesimo usato nel precedente caso più particolare. Prendiamo infatti a considerare una funzione qualunque z di x, ed y, e supponghiamo che riducendola in serie per le potenze di x si abbia

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \dots + a_n x^n + \text{ec.}$$

noi avremo dal Calcolo differenziale

$$a_n = \frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right)$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Allorchè vorremo la funzione z svolta in serie per le potenze, e per i prodotti delle variabili x, ed y, sarà d' uopo svolgere in serie per le potenze di y tutte le quantità a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, ec. ossia le quantità z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$, $\frac{1}{2.3.}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$, ec....... $\frac{1}{1.2.3 \dots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$ ec. ove dopo le differenziazioni è stato fatto $x = 0$.

Pertanto nella evoluzione della funzione z il coefficiente di $x^n y^m$ sarà

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n . 1.2.3 \dots m} \left(\frac{d^{n+m} z}{dx^n dy^m} \right)$$

facendo $x = y = 0$ dopo le differenziazioni.

Se dunque nella funzione proposta z sostituiremo in luogo di x prima $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e chiameremo u, u' i resultati di queste sostituzioni, noi avremo per il Teorema del numero precedente

$$z = \frac{1}{\pi} \int \frac{(u + u')}{2} \, d\phi .$$

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right) = \frac{1}{\pi} \int (u + u') \cos. n\phi . d\phi ,$$

integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, e facendo $x = 0$ dopo aver differenziato; e se supporremo

$$S = \frac{1}{\pi} \int \frac{(u + u')}{2} \, d\phi .$$

$$T = \frac{1}{\pi} \int (u + u') \cos. n\phi . d\phi .$$

Sarà più semplicemente

$$z = S .$$

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right) = T .$$

Ove le quantità S, T dipendono da y soltanto.

Facciamo ora in ciascuna di queste Equazioni prima $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$, e chiamando h, h', quello che S diverrà per queste sostituzioni, e k, k', quello che diverrà T, noi avremo, per lo stesso Teorema del precedente articolo, integrando tra i limiti $\psi=0$, $\psi=\pi$, e facendo $y=0$ dopo le differenziazioni,

$$\left.\begin{aligned}
z &= \frac{1}{\pi}\int\frac{(h+h')}{2}\,d\psi\,. \\
\frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(\frac{d^m z}{dy^m}\right) &= \frac{1}{\pi}\int(h+h')\cos.m\psi\,d\psi\,. \\
\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) &= \frac{1}{\pi}\int\frac{(k+k')}{2}\,d\psi \quad \ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n} z}{dy^m dx^n}\right) &= \frac{1}{\pi}\int(k+k')\cos.m\psi\,d\psi\,.
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{N})$$

Supponendo ora $z=\mathrm{F}(x\,,y)$ sarà per le convenzioni stabilite,

$$u=\mathrm{F}(e^{\phi\sqrt{-1}}\,,y)\,.$$

$$u'=\mathrm{F}(e^{-\phi\sqrt{-1}}\,,y)\,.$$

Ed avremo anche

$$\mathrm{S}=\frac{1}{\pi}\int\frac{(u+u')}{2}\,d\phi=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{\mathrm{F}(e^{\phi\sqrt{-1}}\,,y)+\mathrm{F}(e^{-\phi\sqrt{-1}}\,,y)}{2}\right]d\phi\,.$$

$$\mathrm{T}=\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\phi.d\phi=\frac{1}{\pi}\int(\mathrm{F}(e^{\phi\sqrt{-1}},y)+\mathrm{F}(e^{-\phi\sqrt{-1}},y))\cos.n\phi d\phi.$$

estendendo gli integrali da $\phi=0$ a $\phi=\pi$.

Rammentandoci adesso che h, h', sono quel che S diviene per la successiva sostituzione di $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, ed $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$; e che k, k' si deducono da T nel modo stesso, facilmente vedremo che facendo

$$\Sigma=\mathrm{F}(e^{\phi\sqrt{-1}}, e^{\psi\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(e^{-\phi\sqrt{-1}}, e^{\psi\sqrt{-1}})+\mathrm{F}(e^{\phi\sqrt{-1}}, e^{-\psi\sqrt{-1}})$$
$$+\mathrm{F}(e^{-\phi\sqrt{-1}}, e^{-\psi\sqrt{-1}})$$ si avrà

$$h+h'=\frac{1}{\pi}\int\frac{\Sigma}{2}\,.\,d\phi\,;\ k+k'=\frac{1}{\pi}\int\Sigma.\cos.n\phi.d\phi\,;$$

sostituendo ora questi valori nelle Equazioni (N), otterremo immediatamente per l'indipendenza delle variabili

$$z = \frac{1}{\pi^2} \int^2 \frac{\Sigma}{4} \, d\phi . d\psi .$$

$$\frac{1}{1.2.3....m} \left(\frac{d^m z}{dy^m} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int^2 \frac{\Sigma}{2} \cos . m\psi . d\phi . d\psi .$$

$$\frac{1}{1.2.3...n} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int^2 \frac{\Sigma}{2} \cos . n\phi . d\phi . d\psi .$$

$$\frac{1}{1.2.3..n.1.2.3...m} \left(\frac{d^{n+m} z}{dx^n dy^m} \right) = \frac{1}{\pi^2} \int^2 \Sigma . \cos . n\phi . \cos . m\psi . d\phi . d\psi .$$

Integrando da $\phi = 0$ sino a $\phi = \pi$, e da $\psi = 0$ sino a $\psi = \pi$, e facendo inoltre $x = y = 0$ dopo le differenziazioni.

Quindi facilmente apparisce come dovremo contenerci se il numero delle variabili sarà anco maggiore di due. Data la funzione $z = F(x, y, u, t, \text{ec.})$, noi aggiungeremo insieme altrettante funzioni della forma

$$F\left(e^{\pm\phi\sqrt{-1}}, e^{\pm\psi\sqrt{-1}}, e^{\pm\delta\sqrt{-1}}, \text{ec.} \right)$$

in quanti modi è possibile il permutare tra di loro i segni delle quantità

$$\pm\phi\sqrt{-1}, \pm\psi\sqrt{-1}, \pm\delta\sqrt{-1}, \text{ec.}$$

e chiamata Σ questa somma, avremo

$$\frac{\left(\frac{d^{n+m+p+....} z}{dx^n . dy^m . du^p ....} \right)}{1.2.3..m.1.2.3...n.1.2.3...p....} = \frac{1}{\pi^k} \int^k \Sigma . \cos . n\phi . \cos . m\psi . \cos . p\delta .... . d\phi . d\psi . d\delta .....$$

ove $k =$ al numero delle variabili, e dove le integrazioni devono estendersi da $\phi = \psi = \delta = ... = 0$ sino a $\phi = \psi = \delta = ... = \pi$, purchè dopo le differenziazioni facciasi $x = y = u = ... = 0$. E dalle cose precedenti facilmente apparirà ancora che quando una delle quantità n, m, p, ec. sarà $= 0$, converrà dividere il secondo membro per 2; se due di esse saranno $= 0$, dovremo dividere per 2^2; e generalmente se r di quelle quantità mancheranno, dovrà il secondo membro esser diviso per 2^r.

4.

Consideriamo attualmente le due serie infinite

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec} \ldots + A_n x^n + \text{ec}.$$

$$z' = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec} \ldots + a_n x^n + \text{ec}.$$

e proponghiamoci di trovar la somma della serie

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec} \ldots + A_n a_n + \text{ec}.$$

chiamando u, u' quello che diviene z facendovi successivamente $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e chiamando inoltre k, k' quello che diviene z' in virtù delle stesse sostituzioni, le due serie proposte si trasformeranno facilmente nelle due seguenti

$$(1) \ldots\ldots \frac{u+u'}{2} = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + A_3 \cos.3\phi + \text{ec} \cdots + A_n \cos.n\phi + \text{ec}.$$

$$(2) \ldots\ldots \frac{k+k'}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec} \ldots + a_n \cos.n\phi + \text{ec}.$$

Moltiplicando adesso la prima di queste per $(k+k')d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, otterremo dividendo per π

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')d\phi = \frac{A}{\pi}\int (k+k')d\phi + \frac{A_1}{\pi}\int (k+k')\cos.\phi.d\phi +$$
$$\frac{A_2}{\pi}\int (k+k')\cos.2\phi.d\phi. + \text{ec} \cdots\cdots + \frac{A_n}{\pi}\int (k+k')\cos.n\phi.d\phi + \text{ec}.$$

Ma applicando alla serie (2) il Teorema dell'articolo (1), abbiamo, tra i limiti stabiliti

$$a = \frac{1}{\pi}\int \frac{(k+k')}{2}\, d\phi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int (k+k')\, \cos.n\phi.\, d\phi.$$

Quindi sarà, sostituendo,

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')d\phi - Aa = Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec} \ldots + A_n a_n + \text{ec}.$$

5.

Il problema quì sopra risoluto fu primieramente trattato da Parceval, il quale, per una strada diversa dalla nostra

giunse ad un resultato in apparenza molto dissimile dal precedente. Con facilità per altro possono l' uno all' altro ridursi, e per convincerne credo utile quì riportare come Parceval risolvè questo problema, tanto più che nel seguito di questa Memoria avremo occasione di fare alcune riflessioni sopra la di lui soluzione.

Siano date le due serie

$$Fx = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.}$$

$$f\frac{1}{x} = a + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + a_3 \frac{1}{x^3} + \text{ec.}$$

Se noi ne faremo il prodotto, troveremo in esso tre specie distinte di termini. vi saranno quelli che non contengono la x; e questi otterremo moltiplicando i termini corrispondenti delle due serie; vi saranno inoltre i termini che contengono le potenze positive di x, e finalmente i termini che comprendono le potenze negative. Il nostro prodotto sarà pertanto della forma

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.} \ldots + [\alpha x^m] + [\beta \frac{1}{x^m}] = Fx . f\frac{1}{x}$$

indicando col segno $[\alpha x^m]$ tutti i termini che contengono potenze positive di x, e col segno $[\beta \frac{1}{x^m}]$ quelli che contengono le potenze negative. Se ora in questa Equazione faremo successivamente $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$, otterremo a cagione della nota relazione $e^{\pm\phi\sqrt{-1}} = \cos.\phi \pm \text{sen}.\phi\sqrt{-1}$, i due resultati seguenti:

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.} \ldots + [\alpha(\cos.m\phi + \sqrt{-1}\,\text{sen}.m\phi)]$$
$$+ [\beta(\cos.m\phi - \sqrt{-1}\,\text{sen}.m\phi)] = Fe^{\phi\sqrt{-1}} . fe^{-\phi\sqrt{-1}},$$
$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.} \ldots + [\alpha(\cos.m\phi - \sqrt{-1}\,\text{sen}.m\phi)]$$
$$+ [\beta(\cos.m\phi + \sqrt{-1}.\text{sen}.m\phi)] = Fe^{-\phi\sqrt{-1}} . fe^{\phi\sqrt{-1}},$$

ed aggiungendo queste due Equazioni, avremo

$$2(Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.}) + 2(\alpha\cos.m\phi) + 2(\beta\cos.m\phi) = \ldots\ldots$$

$$= Fe^{\phi\sqrt{-1}} fe^{-\phi\sqrt{-1}} + Fe^{-\phi\sqrt{-1}} fe^{\phi\sqrt{-1}} .$$

Per fare sparire i termini che comprendono la quantità $\cos. m\phi$ basterà moltiplicare da ambe le parti per $d\phi$, ed integrare tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, avremo quindi, dividendo per 2π,

$$A a + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec.} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \left[Fe^{\phi\sqrt{-1}} fe^{-\phi\sqrt{-1}} + Fe^{-\phi\sqrt{-1}} fe^{\phi\sqrt{-1}} \right] d\phi$$

6.

Così presso a poco dimostrò Parceval questo Teorema analitico. La formula che noi abbiamo trovata nell'articolo 4.

$$\text{(R)} \quad \frac{1}{2\pi} \int (u+u')(k+k') d\phi - Aa = Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec.}$$

vi si riduce per altro assai facilmente. Rammentandoci infatti del significato che nel citato articolo hanno le quantità u, u', k, k', troveremo che nel prodotto $(u+u')(k+k')$ la somma dei termini uk, $u'k'$ è rappresentata come segue:

$$uk + u'k' = (A + A_1 e^{\phi\sqrt{-1}} + A_2 e^{2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$(a + a_1 e^{\phi\sqrt{-1}} + a_2 e^{2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$+ (A + A_1 e^{-\phi\sqrt{-1}} + A_2 e^{-2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$(a + a_1 e^{-\phi\sqrt{-1}} + a_2 e^{-2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

eseguite le moltiplicazioni, un termine qualunque sarà espresso dalla formula

$$A_m a_n \left(e^{(m+n)\phi\sqrt{-1}} + e^{-(m+n)\phi\sqrt{-1}} \right)$$

cioè dalla sua equivalente

$$2A_m a_n \cos.(m+n)\phi$$

ed il solo termine indipendente da $\cos.\phi$ sarà $2Aa$. Moltipli-

cando dunque per $d\phi$ la quantità $uk+u'k'$, e la sua equivalente quì sopra assegnata, è chiaro che estendendo gli integrali da $\phi=0$ sino a $\phi=\pi$, noi avremo solamente

$$\frac{1}{2\pi}\int (uk+u'k')\,d\phi = \mathrm{A}a$$

quindi la quantità

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')\,d\phi - \mathrm{A}a$$

si ridurrà alla forma più semplice

$$\frac{1}{2\pi}\int (uk'+u'k)\,d\phi$$

e la nostra Equazione (R) diverrà

$$\frac{1}{2\pi}\int (uk'+u'k)\,d\phi = \mathrm{A}a + \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \text{ec.}$$

formula identica con quella dell' Articolo precedente, come è facile persuadersene, ricordandosi che u, u' sono quello che diviene la funzione qualunque $z=\mathrm{F}x$, ove in luogo di x è stato posto prima $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$; e che lo stesso si è fatto per ottenere k, k' dall' altra funzione $z'=fx$.

7.

La nostra analisi ci offre anche il modo di generalizzare quanto è possibile questo Teorema, applicandolo al caso in cui le serie proposte contengano più variabili, ed al caso ancora in cui le serie siano in un numero qualunque. Ma prima di mostrare come ciò possa eseguirsi, credo opportuno quì indicare un nuovo Teorema molto generale da cui come caso particolare quello del numero 4. discende.

Date le due serie qualunque

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_n x^n + \text{ec.}$$

$$\mathrm{F}x = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + b_n x^n + \text{ec.}$$

proponghiamoci di trovar la somma della serie il di cui termine generale sia della forma $a_p b_q$, essendo p, q due nu-

meri interi comunque, ma tali che variando da un termine all' altro, pure indipendentemente dal segno, la loro differenza $p-q$ si conservi costante. Dalle cose precedenti troveremo facilmente le due trasformate

$$\frac{u+u'}{2}=a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}....+a_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.$$

$$\frac{k+k'}{2}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}.....+b_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.$$

essendo al solito u, u' quello che fx diviene per le successive sostituzioni di $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x=e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e lo stesso dicasi per le quantità k, k' riferite alla funzione Fx.

Da quelle due Equazioni ne dedurremo quest' altra:

$$\frac{(u+u')(k+k')}{4}=(a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}....+a_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.)$$

$$(S)\qquad ....\times(b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}....+b_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.),$$

ed effettuando la operazione indicata nel secondo membro, troveremo che un termine qualunque di questo prodotto sarà della forma $a_p\, b_q \cos.p\phi.\cos.q\phi.$, cioè della forma

$$(V)\qquad ......\tfrac{1}{2}\, a_p\, b_q\cos.(p-q)\phi+\tfrac{1}{2}\, a_p\, b_q\cos.(p+q)\phi\,.$$

Proponghiamoci adesso di trovare in quel prodotto il coefficiente di $\cos.\delta\phi$. Prima di tutto in questo coefficiente vi saranno come è chiaro i due termini

$$a\, b_\delta+a_\delta b\,,$$

vi saranno poi tutti i termini dati dal primo termine della riduzione (V), ove $p-q=\delta$, e ciò indipendentemente dal segno, ed esclusi i casi di $p=0$, o di $q=0$, essendo questi già considerati; e tutti questi termini gli rappresenteremo col segno

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, a_p\, b_q$$

essendo $\Sigma\, a_p\, b_q$ la somma di tutti i termini della forma $a_p\, b_q$, ove dall' un termine all'altro la quantità $p-q$ è costante ed $=\delta$ indipendentemente dal seguo.

E finalmente vi saranno anco tutti i termini dati dal secondo termine della riduzione (V), ove $p+q$ sia $=\delta$, e questi tutti presi insieme gli chiameremo

$$\frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q$$

$\Sigma' a_p b_q$ indicando la somma dei termini della forma $a_p b_q$, ove in ognuno di essi $p+q=\delta$.

Riunendo queste tre distinte specie di termini vedremo che il coefficiente di $\cos.\delta\phi$ nel secondo membro della Equazione (S) sarà

$$ab_\delta+a_\delta b+\frac{1}{2}\Sigma\, a_p b_q+\frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q .$$

Ma questo stesso coefficiente sarà dato nel primo membro della stessa Equazione (S) dalla formula

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')\cos.\delta\phi.d\phi$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, come abbiamo già dimostrato nell' articolo 1. Quindi eguagliando questi due coefficienti, si avrà

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')\cos.\delta\phi.\,d\phi=$$

$$ab_\delta+a_\delta b+\frac{1}{2}\Sigma a_p b_q+\frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q .$$

Onde ne trarremo

$$a\,b_\delta+a_\delta\,b+\Sigma\, a_p b_q=$$

$$\frac{1}{\pi}\int(u+u')(k+k')\cos.\delta\phi\, d\phi-ab_\delta-a_\delta b-\Sigma' a_p b_q$$

indicando col segno $\Sigma' a_p b_q$ la somma dei termini della forma $a_p b_q$, ove $p+q=\delta$, e denotando col segno $\Sigma a_p b_q$ la serie infinita dei termini, ove fatta astrazione dal segno, si ha $p-q=\delta$, escludendo per altro in ambedue queste formule il caso di $p=0$, o di $q=0$. E se vorremo più semplicemente la espressione precedente, potremo dargli la forma

$$\text{(H)}\qquad \frac{1}{\pi}\int(u+u')(k+k')\cos.\delta\phi.d\phi-\Sigma' a_p b_q=\Sigma a_p b_q ,$$

ove adesso nei segni $\Sigma' a_p b_q$, $\Sigma a_p b_q$ sono compresi i casi di $p=0$, e di $q=0$. Il nostro problema è pertanto completamente risoluto.

Il Teorema del numero 4. è compreso in questa soluzione, e ne discende supponendo $p-q=\delta=0$. In questo caso non si può sodisfare alla condizione $p+q=\delta=0$ se non chè supponendo $p=0$, $q=0$. Quindi il segno $\Sigma' a_p b_q$ esprimerà semplicemente il solo termine $2ab$, ed il segno $\Sigma a_p b_q$ rappresenterà la serie

$$2\,(ab+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3+\text{ec.})$$

poichè nelle due formule $\Sigma' a_p b_q$, $\Sigma a_p b_q$ se vi è il termine $a_m b_n$ vi è ancora l'altro $a_n b_m$; sostituendo ora questi valori nella Equazione (H) troveremo, dividendo per 2

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')d\phi-ab=ab+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3+\text{ec.}$$

come già nel numero 4. trovammo.

8.

Passiamo ora a vedere come il Teorema del numero 4. reso nel precedente articolo più generale, possa estendersi al caso di più variabili. Proponghiamoci pertanto di trovar la somma della serie

$$a_{0,0}b_{0,0}+a_{1,0}b_{1,0}+a_{0,1}b_{0,1}+a_{2,0}b_{2,0}+a_{1,1}b_{1,1}+a_{0,2}b_{0,2}+\text{ec.}$$

formata dalla addizione dei prodotti dei termini corrispondenti nelle due serie conosciute

$$z_{x,y}=a_{0,0}+a_{1,0}y+a_{0,1}x+a_{2,0}y^2+a_{1,1}xy+a_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

$$z'_{x,y}=b_{0,0}+b_{1,0}y+b_{0,1}x+b_{2,0}y^2+b_{1,1}xy+b_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

ove sarà

$$a_{m,n}=\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z_{x,y}}{dy^m.dx^n}\right)$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z'_{x,y}}{dy^m.dx^n}\right)$$

facendo $x=0$, $y=0$ dopo le differenziazioni.

Ciò posto, facciamo prima $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$ e chiamando P, P′ quello che diviene $z_{x,y}$ per tali sostituzioni; e Q, Q′ quello parimente che diviene $z'_{x,y}$, noi avremo facilmente

$$\frac{P+P'}{2}=a_{0,0}+a_{1,0}\cos.\psi+a_{0,1}x+a_{2,0}\cos.2\psi+a_{1,1}x\cos.\psi+a_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

$$\frac{Q+Q'}{2}=b_{0,0}+b_{1,0}\cos.\psi+b_{0,1}x+b_{2,0}\cos.2\psi+b_{1,1}x\cos.\psi+b_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

Parimente in queste equazioni facendo successivamente $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x=e^{-\phi\sqrt{-1}}$, avremo, chiamando Σ, Σ' le respettive somme dei parziali resultati che con tali sostituzioni otterremo per le quantità P+P′, Q+Q′,

$$\frac{\Sigma}{4}=a_{0,0}+a_{1,0}\cos.\psi+a_{0,1}\cos.\phi+a_{2,0}\cos.2\psi+ a_{1,1}\cos.\psi\cos.\phi+a_{0,2}\cos.2\phi+\text{ec.}$$

$$\frac{\Sigma'}{4}=b_{0,0}+b_{1,0}\cos.\psi+b_{0,1}\cos.\phi+b_{2,0}\cos.2\psi+ b_{1,1}\cos.\psi\cos.\phi+b_{0,2}\cos.2\phi+\text{ec.}$$

E sarà, come nell' articolo 3. abbiamo dimostrato

$$\left.\begin{aligned}
a_{0,0} &= \frac{\int^2 \Sigma.d\phi.d\Psi}{4\pi^2}\\
a_{m,0} &= \frac{\int^2 \Sigma.\cos m\psi.d\phi.d\psi}{2\pi^2}\\
a_{0,n} &= \frac{\int^2 \Sigma.\cos n\phi.d\phi.d\psi}{2\pi^2}\\
a_{m,n} &= \frac{\int^2 \Sigma.\cos.m\psi\cos.n\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2}
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, $\psi=0$, $\psi=\pi$. Analoghi saranno i valori di $b_{0,0}$, $b_{m,0}$ ec. e si otterranno da quelli di $a_{0,0}$, $a_{m,0}$ ec. cambiandovi solamente Σ in Σ'.

Riprendiamo adesso la Equazione

$$\frac{\Sigma'}{4}=b_{0,0}+b_{1,0}\cos.\psi+b_{0,1}\cos.\phi+b_{2,0}\cos.2\psi+$$
$$b_{1,1}\cos.\phi.\cos.\psi+b_{0,2}\cos.2\phi+\text{ec.}$$

moltiplicandola da ambe le parti per $\frac{\Sigma.d\phi.d\psi}{\pi^2}$ ed integrando prima rapporto a ψ, quindi rapporto a ϕ tra i limiti $\psi=0$, $\psi=\pi$, $\phi=0$, $\phi=\pi$, noi avremo

$$\frac{\int^2\Sigma.\Sigma'd\phi.d\psi}{4\pi^2}=b_{0,0}\frac{\int^2\Sigma d\phi.d\psi}{\pi^2}+b_{1,0}\frac{\int^2\Sigma\cos.\psi d\phi.d\psi}{\pi^2}+b_{0,1}\frac{\int^2\Sigma\cos.\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2}$$
$$+b_{2,0}\frac{\int^2\Sigma\cos.2\psi.d\phi.d\psi}{\pi^2}+b_{1,1}\frac{\int^2\Sigma.\cos.\psi\cos.\phi\,d\phi.d\psi}{\pi^2}+b_{0,2}\frac{\int^2\Sigma\cos.2\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2}+\text{ec.}$$

ma tra i medesimi limiti abbiamo dalle Equazioni (A), comunque siano m, ed n

$$4\,a_{0,0}=\frac{\int^2\Sigma.d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$2\,a_{m,0}=\frac{\int^2\Sigma\cos.m\psi d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$2\,a_{0,n}=\frac{\int^2\Sigma\cos.n\phi\,d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$a_{m,n}=\frac{\int^2\Sigma.\cos.m\psi.\cos.n\phi.d\phi\,d\psi}{\pi^2}$$

quindi, sostituendo, la nostra trasformata diverrà

$$\frac{\int^2\Sigma.\Sigma'd\phi.d\psi}{4\pi^2}-a_{0,0}b_{0,0}=a_{0,0}b_{0,0}+a_{1,0}b_{1,0}+a_{0,1}b_{0,1}+$$
$$a_{2,0}b_{2,0}+a_{1,1}b_{1,1}+a_{0,2}b_{0,2}+\text{ec.}$$
$$+a_{0,0}b_{0,0}+a_{1,0}b_{1,0}+a_{2,0}b_{2,0}+a_{3,0}b_{3,0}+\text{ec.}\qquad\text{(U)}$$
$$+a_{0,0}b_{0,0}+a_{0,1}b_{0,1}+a_{0,2}b_{0,2}+a_{0,3}b_{0,3}+\text{ec.}$$

Le due ultime file di questo secondo membro possono agevolmente conoscersi, riprendendo le serie proposte

$$z_{x,y} = a_{0,0} + a_{1,0} y + a_{0,1} x + a_{2,0} y^2 + a_{1,1} xy + a_{0,2} x^2 + \text{ec.}$$

$$z'_{x,y} = b_{0,0} + b_{1,0} y + b_{0,1} x + b_{2,0} y^2 + b_{1,1} xy + b_{0,2} x^2 + \text{ec.}$$

Se infatti faremo $x=0$ in queste espressioni, si troverà

$$z_{0,y} = a_{0,0} + a_{1,0} y + a_{2,0} y^2 + a_{3,0} y^3 + \text{ec.}$$

$$z'_{0,y} = b_{0,0} + b_{1,0} y + b_{2,0} y^2 + b_{3,0} y^3 + \text{ec.}$$

alle quali potremo applicare il Teorema del numero 4. perchè dipendono da una sola variabile, e dedurne la somma μ della serie

$$\mu = a_{0,0} b_{0,0} + a_{1,0} b_{1,0} + a_{2,0} b_{2,0} + a_{3,0} b_{3,0} + \text{ec.}$$

similmente dalle stesse serie proposte, facendovi $y=0$, facilmente vedremo che con lo stesso Teorema del numero 4 si otterrà la somma μ' della serie

$$\mu' = a_{0,0} b_{0,0} + a_{0,1} b_{0,1} + a_{0,2} b_{0,2} + a_{0,3} b_{0,3} + \text{ec.}$$

sostituendo dunque questi valori nella Equazione (U) avremo

$$\frac{1}{4} \frac{\int^2 \Sigma\, \Sigma' d\phi . d\psi}{\pi^2} - (\mu + \mu' + a_{0,0} b_{0,0}) = a_{0,0} b_{0,0} + a_{1,0} b_{1,0} + a_{0,1} b_{0,1}$$
$$+ a_{2,0} b_{2,0} + a_{1,1} b_{1,1} + a_{0,2} b_{0,2} + \text{ec.}$$

La quale Equazione risolve il problema proposto. È inutile l'avvertire che lo stesso metodo serve ad estendere questo Teorema al caso in cui le serie proposte dipendessero da un numero di variabili maggiore di due.

9.

Abbiamo veduto nell' articolo 4 come, date le due serie ordinate per le potenze ascendenti della variabile x

$$(1) \qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(2) \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

è sempre possibile di ottenere la somma della serie che nasce dalla addizione dei prodotti ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ec. ogni volta che siano conosciute z, z'. Questo Teorema è utile quando vogliasi ottenere sotto forma finita l' integrale di una Equazione a differenze parziali, che sia espresso in una serie infinita, ed in una serie tale che si possa decomporre in altre due di cui sia nota la somma, e che moltiplicate termine per termine la riproducano, appunto nella maniera con cui la serie

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \text{ec.}$$

dipende dalle serie (1), (2). Ma può spesso succedere che la serie proposta non possa decomporsi in altre due conosciute, e che per altro si possa risolvere in un numero maggiore di due. Date pertanto le serie in un numero qualunque

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

ec.

conviene esaminare se sia possibile di ritrovar la somma della serie.

$$abc \ldots + a_1 b_1 c_1 \ldots + a_2 b_2 c_2 \ldots + a_3 b_3 c_3 \ldots + \text{ec.}$$

Brevemente adesso vedremo che questo caso ancora è suscettibile di una generale evoluzione.

Supponghiamo che le serie conosciute siano tre, e da questo caso particolare vedremo come dobbiamo regolarci essendo il numero di esse qualunque. Sia pertanto

$$(m) \qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m') \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m'') \qquad z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

Si sostituisca nella serie (m) in luogo di x la quantità $e^{(\phi+k)\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-(\phi+k)\sqrt{-1}}$; avremo, chiamando R, R' i resultati, ed aggiungendoli

$$\frac{R+R'}{2} = a + a_1 \cos.(\phi+k) + a_2 \cos.2(\phi+k) + a_3 \cos.3(\phi+k) + \text{ ec.}$$

parimente nella stessa serie (m) in luogo di x prima si ponga $e^{(\phi-k)\sqrt{-1}}$, e quindi $e^{-(\phi-k)\sqrt{-1}}$, chiamando R'', R''' i resultati di queste sostituzioni nella funzione z, avremo, aggiungendoli

$$\frac{R''+R'''}{2} = a + a_1 \cos.(\phi-k) + a_2 \cos.2(\phi-k) + a_3 \cos.3(\phi-k) + \text{ec.}$$

E sommando questo valore di $\frac{R''+R'''}{2}$ con l' altro di $\frac{R+R'}{2}$, avremo

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{2} = 2\left(a + a_1\left(\frac{\cos.(\phi+k)+\cos.(\phi-k)}{2}\right)\right.$$
$$\left.+ a_2\left(\frac{\cos.2(\phi+k)+\cos.2(\phi-k)}{2}\right) + a_3\left(\frac{\cos.3(\phi+k)+\cos.3(\phi-k)}{2}\right) + \text{ec.}\right)$$

Ma avendosi

$$\frac{\cos.p(\phi+k)+\cos.p(\phi-k)}{2} = \cos.p\phi.\cos.pk.$$

sarà ancora, sostituendo

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4} = a + a_1 \cos.\phi.\cos.k + a_2 \cos.2\phi.\cos.2k$$
$$+ a_3 \cos.3\phi.\cos.3k + \text{ec.}$$

Ottenuto questo resultato, riprendiamo le altre due serie

$$(m') \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m'') \qquad z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

Nella serie (m') facciasi $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, e quindi $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$; aggiungendo i resultati, e facendo questa somma $=$ H, si avrà

$$\frac{H}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

Parimente nella serie (m'') ponghiamo $x=e^{k\sqrt{-1}}$, e quindi $x=e^{-k\sqrt{-1}}$, e si aggiunga; facendo il resultato di questa addizione $=$ H', si avrà

$$\frac{H'}{2}=c+c_1\cos.k+c_2\cos.2k+c_3\cos.3k+\text{ec.}$$

Ed avremo dalle cose precedenti (1)

$$b_s=\frac{1}{\pi}\int H.\cos.s\phi.d\phi.$$

$$c_s=\frac{1}{\pi}\int H'.\cos.sk.dk$$

purchè gli integrali siano presi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$; e sarà ancora tra i limiti stessi

$$b_s=\frac{1}{\pi}\int\frac{H}{2}\,d\phi$$

$$c=\frac{1}{\pi}\int\frac{H'}{2}\,dk.$$

Riprendiamo adesso la Equazione sopra ottenuta

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4}=a+a_1\cos.\phi.\cos.k+a_2\cos.2\phi.\cos.2k$$
$$+a_3\cos.3\phi.\cos.3k+\text{ec.}$$

Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{H}{\pi}d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, si avrà

$$\int\frac{R+R'+R''+R'''}{4\pi}.H.d\phi=\frac{a}{\pi}\int Hd\phi+\frac{a_1}{\pi}\cos.k.\int H\,d\phi.\cos.\phi$$
$$+\frac{a_2}{\pi}\cos.2k\int Hd\phi.\cos.2\phi+\frac{a_3}{\pi}\cos.3k\int Hd\phi.\cos.3\phi$$
$$+\text{ec}\ldots+\frac{a_s}{\pi}\cos.sk\int H\,d\phi.\cos.s\phi+\text{ec.}$$

Ed essendo

$$\frac{1}{\pi}\int H\,d\phi=2b$$

$$\frac{1}{\pi}\int Hd\phi.\cos.s\phi=b_s$$

otterremo, sostituendo,

$$\int \frac{R+R'+R''+R'''}{4\pi} H d\phi = 2ab + a_1 b_1 \cos.k + a_2 b_2 \cos.2k$$
$$+ a_3 b_3 \cos.3k + \text{ec}.$$

Se moltiplicheremo adesso da ambe le parti per $\frac{H'}{\pi} dk$, avremo, integrando tra i limiti $k=0$, $k=\pi$,

$$\int\int \frac{(R+R'+R''+R''')}{4\pi^2} H.H'.d\phi.dk = \frac{2ab}{\pi} \int H'dk + \frac{a_1 b_1}{\pi} \int H'dk.\cos.k$$
$$+ \frac{a_2 b_2}{\pi} \int H'\cos.2k\, dk + \frac{a_3 b_3}{\pi} \int H'\cos.3k dk + \text{ec}.$$

Ma abbiamo veduto essere tra quei limiti

$$2c = \frac{1}{\pi} \int H' dk$$
$$c_s = \frac{1}{\pi} \int H'.dk.\cos.sk.$$

Quindi avrassi, sostituendo,

$$\int\int \frac{(R+R'+R''+R''')}{4\pi^2} H.H'.d\phi.dk = 4abc + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2$$
$$+ a_3 b_3 c_3 + \text{ec}. \ldots + a_s b_s c_s + \text{ec}.$$

La qual formula ci dà la completa evoluzione del nostro problema. Le cose precedenti danno tutta la possibile estensione al Teorema enunciato nell'articolo 4. sopra di cui sembrami nulla aver lasciato da desiderare.

10.

Tutti questi resultati discendono dal Teorema dimostrato nell'articolo 2. mediante il quale, data una funzione qualunque fx di x, che vogliasi in serie per le potenze di x, in modo che sia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec}. \ldots + a_m x^m + \text{ec}.$$

si ha, per determinare il termine generale a_m la Equazione

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int (fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}) \cos.m\phi.\, d\phi.$$

purchè la integrazione sia eseguita da $\phi = o$ sino a $\phi = \pi$. Per darne un esempio semplicissimo, proponghiamoci di svolgere in serie la funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$. Avremo primieramente

$$fx = \frac{2x}{nx^2+2x+n}.$$

E quindi

$$fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} = \frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n} + \frac{2e^{-\phi\sqrt{-1}}}{ne^{-2\phi\sqrt{-1}}+2e^{-\phi\sqrt{-1}}+n}.$$

Ciò è riducendo allo stesso denominatore, ed osservando che $e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}} = 2\cos.\phi$, si avrà

$$fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} = \frac{2}{1+n\cos.\phi}.$$

Quindi sarà

$$a = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}$$

purchè si estendano le integrazioni da $\phi = o$ a $\phi = \pi$.

È noto adesso che si ha tra i limiti stabiliti

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

Sarà dunque ancora sostituendo $a = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$

$$a_m = \pm\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

Ove il segno superiore conviene al caso di m pari, e l' inferiore al caso di m dispari.

Se dunque sostituiremo questi valori nella espressione

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n} = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{ec.}$$

noi avremo

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[1 - 2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)x + 2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2 x^2 - 2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3 x^3 + \text{ec.}\right]$$

II.

Proponghiamoci adesso di svolgere la stessa funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ col metodo ordinario, e per tale oggetto facendo

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n} = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

e moltiplicando per $nx^2 + 2x + n$ avremo

$$\begin{aligned} 2x = & na + na_1 x + na_2 x^2 + na_3 x^3 + na_4 x^4 + \text{ec.} \ldots + na_m x^m + \text{ec.} \\ & + 2ax + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + \text{ec.} \ldots + 2a_{m-1} x^m + \text{ec.} \\ & + nax^2 + na_1 x^3 + na_2 x^4 + \text{ec.} \ldots + na_{m-2} x^4 + \text{ec.} \end{aligned}$$

E dal paragone delle simili potenze di x otterremo $a = 0$, $2a + na_1 = 2$, e generalmente poi $na_m + 2a_{m-1} + na_{m-2} = 0$ alla quale Equazione a differenze finite sodisfa, come è noto, la formula

$$a_m = \pm C\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m \pm C'\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m$$

prendendo il segno superiore se m è pari, e l' inferiore se è dispari. Per determinar le arbitrarie C, C' facciamo $m = 0$, ed avremo $a = C + C' = 0$, onde $C = -C'$. Sia inoltre $m = 1$, ed avendosi $a_1 = C'\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} - \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right) = \frac{2}{n}$

sarà $C' = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$. Quindi generalmente

$$a_m = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m - \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m\right].$$

Questo valore di a_m è differentissimo da quello che ci vien dato dall' analisi del numero precedente, ed è il vero

che conviene alla proposta evoluzione rappresentando esso solo il differenziale m^{esimo} della funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ diviso per $1.2.3....m$, e fattovi dopo $x=0$, come è facile il convincersene differenziando. Vedesi dunque che esistono alcuni casi nei quali il Teorema del numero 1. è erroneo, e siccome da questo Teorema stesso discendono tutti i resultati che precedentemente abbiamo esposti, così questi ancora qualche volta anderanno soggetti ad errore. Convien dunque che per quel Teorema siavi qualche caso di eccezione, appunto come in quello di Taylor; prima per altro di rintracciarlo, sarà utile il fare qualche riflessione sopra l' esempio precedentemente trattato, e che ci ha offerto questo paradosso.

12.

Allorchè ci siamo proposti di svolgere in serie per le potenze di x la funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ noi vi abbiamo prima sostituito in luogo di x $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, ed aggiungendo i due resultati, abbiamo ottenuta la quantità

$$\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}+\frac{2e^{-\phi\sqrt{-1}}}{ne^{-2\phi\sqrt{-1}}+2e^{-\phi\sqrt{-1}}+n}=\frac{2}{1+n\cos.\phi}.$$

Il primo membro di questa Equazione rappresenta una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di ϕ, ed è osservabile che i due termini di questo primo membro sono identicamente eguali; infatti la funzione proposta può mettersi sotto la forma

$$\frac{1}{1+\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)};$$

la quale non varia facendovi le due indicate sostituzioni differenti, e ci dà in ambi i casi $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$; adesso la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può ridursi in serie per coseni degli archi multipli in

due maniere differenti. Se infatti svolgeremo per le potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$ la di lei equivalente $\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}$ avremo, per l'articolo precedente, e facendo per semplicità maggiore $p=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, $p'=\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\Big[(p-p')\,e^{\phi\sqrt{-1}}-(p^2-p'^2)\,e^{2\phi\sqrt{-1}} + (p^3-p'^3)\,e^{3\phi\sqrt{-1}} - \text{ec.}\Big].$$

Se in questa equazione cambieremo ϕ in $-\phi$, ed aggiungeremo, sarà, dividendo per 2

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{1+n\cos.\phi}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\Big[(p-p')\cos.\phi-(p^2-p'^2)\cos.2\phi + (p^3-p'^3)\cos.3\phi - \text{ec.}\Big]$$

Ma la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può ridursi in serie anche in un altro modo, poichè facendo

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+A_3\cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + A_m\cos.m\phi + \text{ec.}$$

si avrà (1) tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$A=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi},\quad A_m=\frac{2}{\pi}\int\frac{\cos.m\phi.d\phi}{1+n\cos.\phi}$$

ossia $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$; $A_m=\pm\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m$.

Cioè, adottando le denominazioni superiori

$$A_m=\pm\frac{2p^m}{\sqrt{1-n^2}}$$

prendendo il segno superiore, se m è pari, e l'inferiore se è dispari. Quindi sostituendo avremo

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{1+n\cos.\phi}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(1-2p\cos.\phi+2p^2\cos.2\phi-2p^3\cos.3\phi+\text{ec.}\right)$$

13.

Le due evoluzioni differentissime per i coseni dei multipli di ϕ che abbiamo veduto convenire egualmente alla funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ ci additano la strada per rinvenire la sorgente dell' errore in cui il Teorema del numero 1. ci ha condotti. Ai termini infatti di questo Teorema, data la funzione fx da svolgersi per le potenze di x in guisa che sia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots\ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

conviene prima in luogo di x sostituire $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, ed aggiungendo, dobbiamo passare al resultato

$$\text{(M)} \quad \frac{fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}$$

ed inferirne quindi tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$a_m = \int \frac{[fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}]}{\pi} \cos.m\phi . d\phi .$$

Allorchè $fx = \frac{2x}{nx^2+2x+n}$ si ha $\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2} = \frac{1}{1+n\cos.\phi}$; quindi per questo caso particolare la Equazione (M) diverrà

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots\ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}$$

Scordandoci adesso che i coefficienti a, a_1, a_2, a_3, ec. appartengono anche allo sviluppo della funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ per le potenze di x, ma considerandoli come unicamente dipendenti dalla evoluzione della formula $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ per i coseni dei multipli di ϕ, è chiaro che essi potranno avere due valori differenti, perchè in due diversi modi può svolgersi la stessa funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ nella forma richiesta.

Una di queste evoluzioni sarà data dal supporre tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int[fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}]\cos.m\phi.\,d\phi = \frac{2}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}$$

ed avremo così come vedemmo la serie (B)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[1-2p\cos.\phi+2p^2\cos.2\phi-2p^3\cos.3\phi+\text{ec.}] \quad \text{(B)}$$

Otterremo l' altra evoluzione sviluppando per le potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$, o la sua equivalente

$\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}$, e cambiando quindi ϕ in $-\phi$ ed aggiungendo; e dopo questa operazione caderemo sopra la serie (A)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[(p-p')\cos.\phi-(p^2-p'^2)\cos.2\phi + (p^3-p'^3)\cos.3\phi - \text{ec.}]. \quad \text{(A)}$$

Ma il coefficiente di $e^{m\phi\sqrt{-1}}$ nello sviluppo della funzione

$\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}$ è lo stesso manifestamente che il coefficiente di x^m nello sviluppo di $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$; quindi è chiaro che i coefficienti dei diversi coseni nella serie (A) equivarranno ai coefficienti delle potenze corrispondenti nello sviluppo della formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$.

Per altro il Teorema del numero 1. esige che il coefficiente di x^m sia dato dalla formula

$$\frac{1}{\pi}\int[e^{\phi\sqrt{-1}}+e^{-\phi\sqrt{-1}}]\cos.m\phi.\,d\phi = \frac{2}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}.$$

Ma ciò è impossibile, perchè questo appunto è il coefficiente generale della serie (B), che è diverso dalla analoga quantità nella serie (A), ossia dal coefficiente di x^m.

14.

Apparisce pertanto dall' Analisi superiore che riducendo il coefficiente di x^m nella evoluzione della formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ a dipendere dallo sviluppo della funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ per i coseni dei multipli di ϕ, non facciamo altro che richiamare un problema di soluzione unica a dipendere da un altro problema che ne ammette infinite; poichè la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può svolgersi per i coseni multipli di ϕ in quanti modi possibili potranno tra di loro combinarsi le due serie (A), e (B), ed in questa moltiplicità di soluzioni quella sola che sodisfa al nostro quesito è la soluzione (A) nella quale il coefficiente di $\cos.m\phi$ equivale al coefficiente di x^m nello sviluppo di $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ per le potenze di x.

Così il problema di ridurre in serie per i coseni dei multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ è realmente indeterminato, e con infinite forme differenti potremo risolverlo. Discende questa particolarità dalla forma stessa prescritta allo sviluppo, nel quale non sono i termini necessariamente l' uno dall' altro indipendenti; a differenza delle serie ordinate per le potenze di una variabile, ove questa indipendenza sempre ha luogo, poichè tra le successive potenze di una variabile non può ammettersi nessuna relazione. Al contrario tra i coseni dei successivi multipli di ϕ questa relazione sussiste, e sappiamo che ha luogo per esempio la eguaglianza

$$-\frac{1}{2}=\cos.\phi+\cos.2\phi+\cos.3\phi+\cos.4\phi+\text{ec.} \qquad (1)$$

Quindi se con un metodo qualunque si svilupperà per i coseni dei multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ in modo che abbiasi

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec.} \quad (\tau)$$

è chiaro che con la relazione sopra riportata potremo variare questo sviluppo secondo le infinite analitiche combinazioni che tra le serie (1), (2) possono farsi.

15.

L' errore dunque in cui il Teorema del numero 1. ci ha condotti, quando ne abbiamo nel numero 10. fatta un' applicazione alla formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ è derivato dall' aver supposto che la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ potesse svolgersi in una unica maniera per i coseni degli archi moltiplici di ϕ, mentre invece essa è suscettibile di due differentissime evoluzioni date dalle serie (A), (B)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[(p-p')\cos.\phi - (p^2-p'^2)\cos.2\phi + (p^3-p'^3)\cos.3\phi - \text{ec.}\right] \quad (A)$$

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[1-2p\cos.\phi+2p^2\cos.2\phi-2p^3\cos.3\phi+\text{ec.}\right] \quad (B)$$

ove $\quad p = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}, \; p' = \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$

Queste due serie, quantunque tanto in apparenza diverse, pure possono agevolmente in questo caso particolare ridursi alla forma medesima. Consideriamo infatti la serie

$$p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

Facilmente troveremo la somma esserne espressa dalla funzione

$$\frac{1}{2}\left[\frac{pe^{\phi\sqrt{-1}}}{1+pe^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{pe^{-\phi\sqrt{-1}}}{1+pe^{-\phi\sqrt{-1}}}\right] = \frac{p^2+p\cos.\phi}{1+2p\cos\,\phi+p^2}.$$

Parimente la serie

$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

sarà espressa dalla formula $\frac{p'^2+p'\cos.\phi}{1+2p'\cos.\phi+p'^2}$

Ma avendosi $p = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, $p' = \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$, sarà $p = \frac{1}{p'}$,
quindi, mediante questa relazione troveremo

$$\frac{p^2+p\cos.\phi}{1+2p\cos.\phi+p^2} + \frac{p'^2+p'\cos.\phi}{1+2p'\cos.\phi+p'^2} = 1 .$$

Questa equazione medesima passerà tra le serie

$$p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

E quindi in luogo della seconda di queste potremo prendere l' unità diminuita della prima.

Ora la serie (A) può mettersi sotto la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+n\cos.\phi} = &- \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[\,p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}\,] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[\,p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}\,]\end{aligned} \qquad (A)$$

E se in questa invece di

$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

faremo la sostituzione sopra indicata, ricaderemo sopra la serie (B)

16.

Quello stesso metodo col quale nel numero 12. abbiamo per la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ ottenute due differenti evoluzioni può ancora generalmente parlando applicarsi a tutte le funzioni di $\cos.\phi$. Ciò dipende dal potere eseguire lo sviluppo della formula proposta per due quantità differenti, e quindi secondochè si adotterà l' una, o l' altra per ordinarne lo sviluppo, si giungerà a' resultati differentissimi. Così se per ottenere lo sviluppo di $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ si incomincierà con eguagliare la proposta funzione ad una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di ϕ, e quindi, tolto il denominatore dal primo membro, ridurremo nel secondo i prodotti dei coseni a coseni di

archi multipli, dal confronto dei coefficienti dei coseni diversi determinando i coefficienti dello sviluppo primitivo, si caderà sopra la serie (B); mentre invece, come vedemmo, se nella evoluzione della formula $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ si ordinerà per le diverse potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$, riducendo poi i diversi termini che si otterranno a dipendere dai coseni mediante la relazione

$$e^{m\phi\sqrt{-1}} + e^{-m\phi\sqrt{-1}} = 2\cos.m\phi$$

si caderà sopra la serie (A) diversissima dalla serie (B).

17.

Per mettere in maggior luce queste generali riflessioni, applicandole nel tempo stesso ad un caso meno particolare, consideriamo la funzione qualunque $Fn\cos.\phi$, la quale, fattovi $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, si ridurrà alla forma $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Riducendo questa funzione in serie per le potenze di $x+\frac{1}{x}$, ed ordinando quindi il resultato per le quantità $x+\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, ec. si avrà

$$F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=A+\frac{A_1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{A_2}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{A_3}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\text{ec.}\ldots+\frac{A_m}{2}\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+\text{ec.}$$

Se eseguiremo le riduzioni indicate, si troverà, come altrove ho dimostrato, che il termine generale A_m è dato dalla serie

$$A_m=\frac{1}{2^{m-1}.1.2.3\ldots m}\left[n^m\frac{d^mFh}{dh^m}+\frac{n^{m+2}}{2(2+2m)}\frac{d^{m+2}Fh}{dh^{m+2}}+\frac{n^{m+4}}{2.4.(2+2m)(4+2m)}\frac{d^{m+4}Fh}{dh^{m+4}}+\text{ec}\right]$$

purchè si supponga $h=0$ dopo le differenziazioni. Ed ivi parimente dimostrammo, (ed avremo inseguito di questa Memoria occasione di farlo vedere per un'altra strada) che la serie su-

periore è rappresentata dalla formula $\frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi\cos.m\phi.d\phi$, purchè la integrazione si faccia tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Dunque adottando questo metodo per svolgere la funzione $Fn\cos.\phi$, il termine generale A_m sarà dato dalla Equazione

$$A_m=\frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi.\cos.m\phi.d\phi\;.$$

Ove è da notarsi che la funzione $Fn\cos.\phi$ deve sempre potersi ridurre in serie per le potenze intiere, e positive di n, poichè il metodo precedente esige che la funzione $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ possa esser ridotta in serie per le potenze intere, e positive di $x+\frac{1}{x}$. Avremo dunque con quelle determinazioni, ponendo in luogo di x il suo valore $e^{\phi\sqrt{-1}}$,

$$Fn\cos.\phi=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+A_3\cos.3\phi+\text{ec.}\qquad\text{(B)}$$

18.

Riprendiamo ora la funzione $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, e riduciamola in serie quando ciò sia possibile, per le potenze di x in guisa che si abbia

$$F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{ec.}\ldots+a_mx^m+\text{ec.}$$

Per determinare i coefficienti a, a_1, a_2 ... a_m ec. differenziamo prima rapporto ad n, quindi rapporto ad x, e ne avremo, chiamando per semplicità F' il differenziale di Fn preso rapporto ad n

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)F'=\frac{da}{dn}+\frac{da_1}{dn}x+\frac{da_2}{dn}x^2+\frac{da_3}{dn}x^3+\text{ec.}$$

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)F'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\text{ec.}$$

Se tra queste due Equazioni elimineremo la quantità comune F', si avrà, ordinando per le potenze di x

$$0 = -n\frac{da}{dn} - \left(n\frac{da_1}{dn} + a_1\right)x - \left(n\frac{da_2}{dn} - n\frac{da}{dn} + 2a_2\right)x^2$$
$$- \left(n\frac{da_3}{dn} - n\frac{da_1}{dn} + a_1 + 3a_3\right)x^3 - \text{ec.}$$

ove avremo

$$\frac{da}{dn} = 0$$
$$n\frac{da_1}{dn} + a_1 = 0$$
$$n\frac{da_2}{dn} - n\frac{da}{dn} + 2a_2 = 0$$
$$n\frac{da_3}{dn} - n\frac{da_1}{dn} + a_1 + 3a_3 = 0\,.$$

ec.

E da queste equazioni si trarrà

$$a = c$$
$$a_1 = \frac{c_1}{n}$$
$$a_2 = \frac{c_2}{n^2}$$
$$a_3 = -\frac{c_1}{n} + \frac{c_3}{n_3}$$

ec.

ove c, c_1, c_2, c_3, ec. sono costanti indipendenti da n.

Determinati così i coefficienti a, a_1, a_2, ...a_m, ec. si avrà

$$F\frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.}$$

Ed in questa variando x in $\frac{1}{x}$, quindi aggiungendo, otterremo, rammentandoci che $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$

$$(A) \qquad Fn\cos\phi = a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec.}$$

Abbiamo trovato ancora nel numero precedente

$$F n \cos.\phi = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + A_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \qquad (B)$$

Ma queste serie non saranno mai identiche, perchè differentissimi sono i coefficienti A, a; A_1, a_1; ec.

Così, per esempio, si ha

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int F n \cos.\phi \, d\phi . \cos.\phi \, .$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int F n \cos.\phi . d\phi . \cos.2\phi ,$$

integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$; ossia 17.

$$A_1 = n \frac{dFh}{dh} + \frac{n^3}{2(2+2)} \frac{d^3Fh}{dh^3} + \frac{n^5}{2.4.(2+2)(4+2)} \frac{d^5Fh}{dh^5} + \text{ec.}$$

$$A_2 = \frac{1}{2.2} \left[n^2 \frac{d^2Fh}{dh^2} + \frac{n^4}{2(2+2.2)} \frac{d^4Fh}{dh^4} + \text{ec.} \right]$$

facendo $h = 0$ dopo le differenziazioni, mentre poi abbiamo $a_1 = \frac{c_1}{n}$, $a_2 = \frac{c_2}{n^2}$, essendo c_1, c_2, indipendenti da n; quindi è chiaro che mai potrà essere, perchè n è indeterminato

$$a_1 = A_1 , \; a_2 = A_2$$

a meno che non succeda che sia $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, e che ciò pure accada alle quantità a_1, a_2. Ma è visibile che acciò abbiasi $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ indipendentemente da n, conviene che la funzione Fh sia tale che tutti i suoi differenziali all' infinito si annullino, facèndovi $h=0$ dopo le differenziazioni; e ciò non può mai verificarsi se non quando Fh non contenga h, ossia quando la funzione proposta $F \frac{n}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ sarà una costante indipendente da $\frac{n}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

19.

Senza entrare nella discussione dei casi particolari in cui potesse avvenire che qualche determinato valore di n inducesse eguaglianza tra i coefficienti delle serie (A), (B), potremo dall'analisi superiore, e dalle considerazioni dell'articolo 14. inferirne che se sia data una funzione qualunque F cos.ϕ. già sviluppata per i coseni dei multipli di ϕ in guisa che sia

$$\text{F}\cos.\phi = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

generalmente parlando i coefficienti a, a_1, a_2, ec. potranno essere stati determinati in una infinità di maniere diverse, e per pronunziare sopra la loro formazione converrà prima conoscere per quali strade lo sviluppo è stato fatto.

Quindi se in quella equazione moltiplicheremo da ambe le parti per $\cos.m\phi.\,d\phi$, ed inseguito si integrerà tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, non potremo concluderne che si abbia tra quei limiti

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int \text{F}\cos.\phi.\cos.m\phi.\,d\phi$$

sino a che non siamo assicurati che lo sviluppo è stato in realità eseguito con questo metodo, che è lo stesso di quello riportato nell'articolo 17. di questa Memoria.

Il supporre, o il non ammettere che lo sviluppo per i coseni dei multipli di ϕ di una funzione qualunque F cos.ϕ sia stato eseguito col metodo del numero 17. ha relazione con un'altra circostanza che sarà opportuno l'esaminare. È noto che in una serie di qualunque forma che rappresenti una funzione, sempre esiste un residuo, il quale esprime la serie stessa, presa da un suo termine qualunque in poi; se dovrà pertanto svilupparsi la funzione F cos.ϕ per i coseni degli archi multipli di ϕ, noi avremo, chiamando in tal caso $\text{P}^{(m)}$ questo residuo, che succede al termine $\text{A}_m \cos.m\phi$,

$$F\cos.\phi = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + \text{ec.} \ldots + A_m\cos.m\phi + P^{(m)}.$$

Se moltiplicheremo da ambe le parti per $\cos.m\phi.d\phi$, ed integreremo rapporto a ϕ tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, facilmente vedremo essere

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.d\phi.\cos.m\phi - \frac{2}{\pi}\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi.$$

Allorchè la evoluzione è stata fatta col metodo del numero 17. abbiamo, come in quell' articolo si è veduto.

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.d\phi.\cos.m\phi.$$

E pertanto questa supposizione comporta seco l' altra

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi = 0$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Quindi se il residuo della serie proposta non sodisfarà a questa condizione, ne inferiremo che i coefficienti A, A_1, A_2, A_3, ec. non sono stati determinati col metodo del numero 17. e tutte le volte poi che l' applicazione di questo metodo allo sviluppo della funzione $F\cos.\phi$ dasse resultati assurdi, imaginarj cioè, o infiniti, ciò indicherà che la proposta funzione è tale che qualunque metodo si adopri per svilupparla secondo i coseni dei multipli di ϕ, mai può essere, tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi = 0.$$

Per maggior chiarezza applicheremo queste riflessioni ad un esempio.

Sia proposto di svolgere per i coseni degli archi multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1-\cos.\phi}$, in modo che sia

$$\frac{1}{1-\cos.\phi} = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + A_3\cos.3\phi + \text{ec.}$$

Prevalendoci del metodo del numero 17. il quale come quì sopra si è veduto, esige che il residuo $P^{(m)}$ sia tale che abbiasi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi. = 0,$$

noi avremo, per determinare il coefficiente qualunque A_m la equazione

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int \frac{d\phi . \cos . m\phi}{1 - \cos . \phi} ,$$

ed il primo termine A sarà dato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\phi}{1 - \cos . \phi}$$

integrando per tutto tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$. Abbiamo ora, integrando indefinitamente

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d\phi}{1 - \cos . \phi} = - \frac{1}{\pi} \frac{1 + \cos . \phi}{\mathrm{sen} . \phi} + \mathrm{cost.\ ec.}$$

e prendendo quest'integrale tra i limiti assegnati e sostituendolo poi nel valore di A, noi avremo $A = \frac{2}{0}$.

Ne concluderemo quindi che la funzione $\frac{1}{1 - \cos . \phi}$ non può svolgersi in una tal serie ordinata per i coseni multipli di ϕ in modo che il di lei residuo soddisfaccia alla proposta condizione.

Con tutto ciò abbiamo, applicando alla funzione $\frac{1}{1 - \cos . \phi}$ il metodo del numero 18.

$$\frac{1}{1 - \cos . \phi} = -2 (\cos . \phi + 2 \cos . 2\phi + 3 \cos . 3\phi + 4 \cos . 4\phi + \mathrm{ec.})$$

Facendo infatti $x = e^{\phi \sqrt{-1}}$, la funzione proposta diverrà $\frac{2x}{2x - x^2 - 1}$, la quale, svolta per le potenze di x, diviene

$$\frac{2x}{2x - x^2 - 1} = -2 (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \mathrm{ec.})$$

ed in qnesta variando x in $\frac{1}{x}$, ed aggiungendo, e risostituendo poi in luogo di x il suo valore $e^{\phi \sqrt{-1}}$, ricaderemo sopra lo sviluppo quì sopra indicato.

20.

Se dunque sarà ora proposta una funzione qualunque fx, la quale svolta in serie per le potenze di x ci dia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + P_x^{(m)}$$

se in luogo di x porremo $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, noi avremo aggiungendo

$$\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos. 2\phi$$

$$+ \text{ec.} \ldots + a_m \cos. m\phi + \frac{P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}}{2}.$$

Moltiplicando adesso da ambe le parti per $\cos. m\phi . d\phi$, ed integrando quindi tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, si avrà

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int [\, fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} \,]\, d\phi . \cos. m\phi -$$

$$\frac{1}{\pi} \int [\, P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}} \,] \cos. m\phi . d\phi .$$

Acciocchè dunque sia come nel numero 1. abbiamo supposto

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int [\, fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} \,]\, d\phi . \cos. m\phi ,$$

conviene che abbiasi tra i limiti assegnati

$$\frac{1}{\pi} \int [\, P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}} \,]\, d\phi . \cos. m\phi = 0 .$$

Quando poi questa condizione non sarà verificata, i Teoremi tutti che dal Teorema del numero 1. abbiamo dedotti, saranno erronei, e converrà sempre aver moltissima attenzione alle condizioni superiori, le quali non essendo verificate, il Teorema del numero 4. e tutte le nuove formule da noi date nei numeri a quello precedenti, e successivi, non avranno più luogo.

21.

In proposito anzi del Teorema dimostrato con la nostra analisi nel numero 4. giova quì osservare che quando si giunge col metodo di Parceval da noi riportato nel numero 5. alla Equazione

$$2(\mathrm{A}a+\mathrm{A}_1a_1+\mathrm{A}_2a_2+\mathrm{A}_3a_3+\text{ec.})+2(\alpha\cos.m\phi)+2(\beta\cos.m\phi)$$
$$=\mathrm{F}e^{\phi\sqrt{-1}}fe^{-\phi\sqrt{-1}}+\mathrm{F}e^{-\phi\sqrt{-1}}fe^{\phi\sqrt{-1}},$$

moltiplicando da ambe le parti per $d\phi$, ed eseguendo la integrazione tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, non si può supporre che tutti i termini moltiplicati per i coseni dei multipli di ϕ si annullino, fondandosi sopra la identità $\int\cos.m\phi.d\phi=0$, ove l'integrale è preso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Una simile conclusione è vera quando si sia certi che la somma degli infiniti termini che comprendono i coseni rappresenti una tal funzione di $\cos.\phi$, che svolta in quella forma, sodisfaccia alle condizioni imposte dal numero 19, mediante le quali il residuo che succede al coseno del multiplo m di ϕ sia tale, che chiamandolo $\mathrm{P}^{(m)}$, abbiasi tra i dati limiti

$$\int\mathrm{P}^{(m)}\cos.m\phi.d\phi=0.$$

Ma quando questa certezza mancherà, dovremo sempre dubitare della verità del Teorema. Se per esempio la serie dei termini che comprendono i coseni fosse la seguente

$$\cos.\phi+2\cos.2\phi+3\cos.3\phi+4\cos.4\phi+\text{ec.}$$

moltiplicando per $d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, si crederebbe di giungere ad un resultato identicamente $=0$, ma d' altronde sappiamo che la serie superiore è rappresentata 19. dalla funzione $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos.\phi}$,

e sappiamo ancora che tra i soliti limiti si ha

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\phi}{1-\cos.\phi}=\infty$$

e non già $$- \frac{1}{2} \int \frac{d\phi}{1-\cos\phi} = 0$$

come, ingannati dalla forma della serie, si potrebbe a prima vista supporre. Ma senza punto entrare in questo esame, spesso impraticabile, quando il Teorema del numero 4. si faccia discendere dalla nostra analisi, le condizioni esposte nel precedente articolo determineranno la confidenza che dobbiamo avere in quel Teorema medesimo, e nelle numerose estensioni di cui abbiamo dimostrato essere esso suscettibile.

22.

L' esempio quì sopra trattato conferma le riflessioni del numero 19. dalle quali abbiamo già inferito che offrendosi una serie qualunque H tale che sia

$$H = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}$$

non se ne potrà mai concludere $a_m = \frac{2}{\pi} \int \mathrm{H}\cos.m\phi.d\phi$, tra i soliti limiti, se pur non siano verificati i criterj che esige una tal determinazione del coefficiente generale. È dunque manifesto che se in una formula analitica si presenteranno una, o più serie infinite di quella forma in qualunque modo combinate, prima di operarvi con la integrazione tra i limiti, converrà accuratamente distinguerle tutte, e per ciascuna di esse non ignorar la indole dei respettivi residui, se non vorremo cadere in errore. Questa cognizione infatti ci garantirà dalle illusioni in cui ci trarrebbe la forma

$$a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

che può essere all' infinito variata in altre analoghe, senza che si muti perciò il valore della funzione che quella serie rappresenta, ed è manifesto che tutte queste forme non porteranno errore, ove pur si conosca il residuo che a ciascuna conviene, poichè in tal modo sarà lo stesso che operare sopra la funzione non sviluppata ancora.

23.

Per mostrare sempre più quanto siano queste precauzioni indispensabili, e come in simili casi è necessario comportarsi, prendiamo a risolvere di nuovo il problema del numero 4. nel quale, date le due serie

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

$$z'_x = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + b_m x^m + P^{(m)}_x,$$

ove $P^{(m)}_x$ è il residuo, si chiede la somma della serie infinita

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \text{ec.}$$

Dalle serie proposte si avrà con le solite sostituzioni facendo

$$H = z_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z_{e^{-\phi\sqrt{-1}}} \; ; \; H' = z'_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z'_{e^{-\phi\sqrt{-1}}},$$

$$K^{(m)} = P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}},$$

$$\frac{H}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.} \quad (1)$$

$$\frac{H'}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2} \quad (2)$$

Incomincieremo con verificare se tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$ abbiasi

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int H' \cos.m\phi . d\phi,$$

e questa Equazione avrà luogo se tra quei limiti sia, denotando m qualunque numero intero

$$\int K^{(m)} \cos.m\phi . d\phi = 0 \; .$$

Se una tal condizione non è smentita, moltiplicheremo la serie (1) per $\frac{1}{\pi} H' d\phi$, ed integrando poi tra i soliti limiti, troveremo che il coefficiente del termine qualunque a_s sarà

$$\frac{1}{\pi} \int H' \cos.s\phi . d\phi = b_s .$$

Sembrerebbe in questa maniera il nostro problema risoluto, ammessa che sia nella serie (2) la condizione

$$\int K^{(m)} \cos. m\phi \, d\phi = 0$$

che deve aver luogo qualunque numero intero sia m e dove $\frac{K^{(m)}}{2}$ denota nella serie medesima il residuo che succede al termine qualsivoglia $b_m \cos. m\phi$. Ma quella sola condizione non basta, ed un' altra analoga ne bisogna per la serie (1).

Riprendiamo infatti le due serie (1), (2),

$$\frac{H}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.} \qquad (1)$$

$$\frac{H'}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2} \qquad (2)$$

Moltiplicandole l' una per l' altra a tenore del metodo ora posto in uso, avremo

$$\frac{HH'}{2} = 2a\left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (1)$$

$$+ 2a_1 \cos.\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (2)$$

$$+ 2a_2 \cos.2\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$+ 2a_s \cos.s\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (s+1)$$

$$\vdots$$

ec.

Moltiplicando ora per $d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, è manifesto che il coefficiente di $2a_s$ nella fila qualunque $(s+1)^{esima}$ orizzontale darà dopo questa operazione per resultato $\frac{1}{2} b_s$, poichè per le condizioni precedenti si ha

$$\int \cos. s\phi . K^{(s)} d\phi = 0 .$$

Ma per esser sicuri che il resultato finale non sia erroneo,

convien pure esser certi (22) che tra le file verticali non passino tali relazioni da rendere illegittima quella integrazione eseguita termine per termine orizzontale. Scriviamo dunque l' Equazione precedente rendendo verticali le file orizzontali, poichè sopra di queste l' integrazione prescritta non può indurre in errore, verificata che sia la condizione

$$\int \cos. m\phi\, K^{(m)}\, d\phi = 0.$$

Facendo dunque la riduzione indicata, si avrà

$$\frac{H.H'}{2} = 2b(a + a_1\cos.\phi + a_2\cos\phi.2 + a_3\cos.3\phi + \text{ec}\ldots + a_m\cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (1)$$

$$+ 2b_1\cos.\phi\,(a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec}\ldots + a_m\cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (2)$$

$$+ 2b_2\cos.2\phi(a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec}\ldots + a_m\cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$+ 2b_s\cos.s\phi(a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec}\ldots + a_m\cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (s+1)$$

$$\vdots$$

ec.

Moltiplicando per $d\phi$, ed integrando tra i prescritti limiti ciascuna fila orizzontale, acciocchè questo resultato non differisca da quello che con altra disposizione di termini si è ottenuto, conviene che il coefficiente di $2b_s$ nella fila orizzontale $(s+1)^{esima}$ dia per resultato $\frac{1}{2}\, a_s$.

Se dunque sarà $Q_x^{(m)}$ il residuo della serie

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.}\ldots + a_m x^m + Q_x^{(m)}$$

si avrà, facendo $L^{(m)} = Q^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + Q^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, ed essendo come sopra $H = z_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$,

$$\frac{H}{2} = a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + \text{ec.}\ldots + a_m\cos.m\phi + \frac{L^{(m)}}{2}.$$

Quindi moltiplicando per $\cos.s\phi.\,d\phi$, acciò il coefficiente di

$2b_s$ nella fila orizzontale $(s+1)^{esima}$ dia dopo la integrazione per resultato il termine unico $\frac{1}{2}a_s$, dovrà essere ancora tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$\frac{1}{2}\int L^{(s)} \cos. s\phi . d\phi = 0 .$$

Apparisce dunque che in ciascuna delle serie proposte

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + Q_x^{(m)}$$

$$z'_x = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + b_m x^m + P_x^{(m)}$$

sono indispensabili le condizioni

$$\int (P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}) \cos. m\phi . d\phi = 0$$

$$\int (Q^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + Q^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}) \cos. m\phi . d\phi = 0 .$$

Ciò è in virtù delle denominazioni adottate

$$\int K^{(m)} \cos. m\phi . d\phi = 0$$

$$\int L^{(m)} \cos. m\phi . d\phi = 0$$

essendo m un numero intero qualunque. Se alcuna di queste condizioni non avrà luogo, il metodo precedente ci condurrà senza dubbio in errore.

Sembrami superfluo l' aggiungere altri esempj, poichè parmi che le considerazioni dei numeri 14. 19, ed i criterj assegnati in quest' ultimo articolo additino abbastanza come generalmente nei casi analoghi converrà comportarsi. Piuttosto, offrendosene quì l' occasione, aggiungerò alcune riflessioni sopra quella particolare specie di integrali definiti, che abbiamo così spesso incontrati nel corso di questa Memoria.

24.

Si è veduto nel numero 17. che una delle maniere per

ridurre la funzione qualunque $F\cos.\varphi$ in una serie ordinata per i coseni dei multipli di φ è la ricerca dell' integrale $\frac{2}{\pi}\int F\cos.\varphi.\cos.m\varphi.d\varphi$ tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, essendo m un numero qualunque intero, e la evoluzione sempre potrà così eseguirsi, finchè (19) quell' integrale non abbia un valore assurdo, come imaginario, o infinito. Tante sono per altro le difficoltà che quella integrazione presenta, che sovente conviene appigliarsi al metodo delle serie, e la induzione facilmente ne offre il modo, conducendoci alla serie assegnata nel numero 17. E giacchè la occasione se ne offre, ci sia permesso di trattare questo problema con una analisi differentissima da quella di semplice induzione da noi adoprata nelle *Ricerche sopra le serie*, tanto più che vedremo discenderne anche qualche non ovvio Teorema di Calcolo integrale.

25.

Sia pertanto proposta la funzione $F(m+\cos.\varphi)$ da svolgersi in serie della forma indicata, in modo che si abbia

$$F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\text{ec}...+A_x\cos.x\varphi+\text{ec}.$$

Ed il termine generale A_x sarà determinato dalla Equazione

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi.\,d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Per mezzo dei noti Teoremi che fanno dipendere le differenze finite di una funzione dai suoi differenziali, noi abbiamo, come è noto

$$F(m+\cos.\varphi)=Fm-1+e^{\cos.\varphi\,\frac{dFm}{dm}}$$

purchè sviluppando l' esponenziale nel secondo membro di questa Equazione, in luogo delle potenze di $\frac{dFm}{dm}$ si sostituiscano i differenziali dello stesso ordine presi rapporto ad m,

ossia purchè in luogo di $\left(\frac{dFm}{dm}\right)^n$ si ponga $\frac{d^nFm}{dm^n}$.

Potremo dunque invèce della funzione $F(m+\cos.\phi)$ considerare la quantità equivalente

$$Fm - 1 + e^{\cos.\phi \frac{dFm}{dm}}$$

e tutto per conseguenza si ridurrà a svolgere in serie la funzione $e^{\cos.\phi \frac{dFm}{dm}}$ per i coseni degli archi moltiplici di ϕ, avvertendo dopo la evoluzione di eseguire gli indicati cambiamenti sopra le potenze di $\frac{dFm}{dm}$. Facciamo dunque per semplicità maggiore $\frac{dFm}{dm} = a$, e proponghiamoci di svolgere la funzione $e^{a\cos.\phi}$ in modo che sia

$$e^{a\cos.\phi} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_x \cos.x\phi + \text{ec.}$$

Noi avremo al solito, integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$b_x = \frac{2}{\pi} \int e^{a\cos.\phi} d\phi \cos.x\phi.$$

Abbiamo ora, integrando per parti

$$\int e^{a\cos.\phi} \cos.x\phi.d\phi = \frac{1}{x}\,\text{sen}.x\phi.\,e^{a\cos.\phi} - \frac{a}{x^2}\cos.x\phi.\text{sen}.\,\phi.e^{a\cos.\phi}$$

$$+ \frac{a}{x}\int \cos.x\phi.\cos.\phi.e^{a\cos.\phi} d\phi - \frac{a^2}{x^2}\int \cos.x\phi.\overline{\text{sen}.\phi}^2\, e^{a\cos.\phi} d\phi,$$

se prenderemo quest' integrale tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, si avrà più semplicemente, moltiplicando tutti i termini per $\frac{2}{\pi}$,

ed osservando che $\overline{\text{sen}.\phi}^2 = 1 - \overline{\cos.\phi}^2$

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos\phi} \cos.x\phi.d\phi = \frac{2}{\pi}\frac{a}{x^2}\int \cos.x\phi.\cos.\phi\, e^{a\cos.\phi} d\phi$$

$$- \frac{2}{\pi}\frac{a^2}{x^2}\int \cos.x\phi.e^{a\cos\phi} d\phi + \frac{a^2}{x^2}\frac{2}{\pi}\int \cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^2\, e^{a\cos.\phi} d\phi$$

onde ricaveremo

$$\frac{(a^2+x^2)}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{a}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\cos.\phi.\,d\phi$$

$$+\frac{a^2}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^2 d\phi\,.$$

Ma abbiamo adesso

$$b_x=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\,d\phi$$

e sarà ancora

$$\frac{db_x}{da}=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\cos.\phi.\,d\phi$$

$$\frac{d^2b_x}{da^2}=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^2.\,d\phi.$$

Sostituendo quindi questi valori nella Equazione precedente avremo per determinare b_x la Equazione lineare del second' ordine

$$\frac{d^2b_x}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db_x}{da}-\frac{(x^2+a^2)}{a^2}\,b_x=0$$

dalla quale dipende il coefficiente generale nella serie

$$e^{a\cos.\phi}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}....+b_x\cos.x\phi+\text{ec}.$$

Ed il primo termine b sarà dato dalla Equazione

$$\frac{d^2b}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db}{da}-b=0\,.$$

26.

Tutto pertanto dipenderà dalla integrazione della Equazione

$$\frac{d^2b_x}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db_x}{da}-\frac{(x^2+a^2)}{a^2}\,b_x=0$$

per la quale non è da tentarsi altra via che quella delle serie. Per riescirvi con maggior facilità facciamovi

$$b_x=q^x p_x$$

essendo q funzione di a, e p_x funzione di a, e di x. Noi avremo, sostituendo

$$x^2\left(\frac{dq^2}{da^2}-\frac{1}{a^2}q^2\right)p_x+x\left[2q\frac{dq}{da}\frac{dp_x}{da}+qp_x\frac{d^2q}{da^2}+\frac{qp_x}{a}\frac{dq}{da}-p_x\frac{dq^2}{da^2}\right]$$
$$+q^2\left[\frac{d^2p_x}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dp_x}{da}-p_x\right]=0\,.$$

Facciamovi, per semplicizzarla

$$\frac{dq^2}{da^2}-\frac{1}{a^2}q^2=0$$

di cui un integrale particolare è $q=a$. Questo essendo al nostro oggetto sufficiente, avremo primieramente

$$b_x=a^x p_x$$

e sostituendo, otterremo anche la Equazione assai semplice per determinare p_x

$$\frac{d^2p_x}{da^2}+\frac{2x+1}{a}\frac{dp_x}{da}-p_x=0\,.$$

Se ora in luogo di p_x sostituiremo una serie ordinata per le potenze ascendenti di a, troveremo facilmeute dal confronto dei termini che tutte le potenze dispari mancheranno, e che se chiameremo h_{2n} il coefficiente della potenza a^{2n}, avremo per il termine generale della serie la espressione

$$h_{2n}a^{2n}=\frac{h_x}{2.4.6\ldots 2n(2+2x)(4+2x)(6+2x)\ldots(2n+2x)}\,a^{2n}$$

essendo h_x una costante arbitraria dipendente da x. Sarà dunque

$$p_x=h_x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

Ma abbiamo $\qquad b_x=a^x p_x$,

e pertanto sostituendovi il valore di p_x, avremo

$$b_x=h_x a^x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

ciò è

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi=h_x a^x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$.

Il valore di p_x quì sopra assegnato non è per altro completo, dovendo per esserlo, contenere due costanti arbitrarie, perchè è dedotto da una Equazione differenziale del second' ordine; ma un poco di attenzione basterà per assicurarci che l' integrale particolare trovato è per il nostro oggetto sufficiente. Se infatti considereremo la funzione $e^{a\cos.\phi}$ svolgendola in serie per le potenze di a troveremo

$$e^{a\cos.\phi} = 1 + a\cos.\phi + \frac{a^2\cos.^2\phi}{2} + \frac{a^3\cos.^3\phi}{2.3} + \ldots + \frac{a^x\cos.^x\phi}{2.3\ldots x} + \text{ec.}$$

Moltiplicando ora per $\frac{2}{\pi}\cos.x\phi.d\phi$, e prendendo l' integrale da $\phi = 0$ a $\phi = \pi$, vedremo che la quantità

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi$$

ci vien data da una serie della forma stessa che quella già trovata, poichè quando $n < x$, si ha sempre tra i limiti stessi

$$\frac{2}{\pi}\int \cos.^n\phi.\cos.x\phi.d\phi = 0$$

onde sarà superfluo il completare il valore di p_x poichè così si indurrebbe nella espressione di b_x un' altra serie di forma assai diversa da quella trovata, e complicata ancora con la trascendente $\log.a$. (si veda il calcolo integrale di Euler). Per tanto la costante che moltiplicherà questa nuova serie dovrà trovarsi $= 0$.

Riprendiamo dunque la espressione

$$b_x = \frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi = h_x a^x\left[1 + \frac{a^2}{2(2+2x)} + \frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)} + \text{ec.}\right]$$

Resta a determinarsi l' arbitraria h_x, ed a tale oggetto osserveremo che differenziando rapporto ad a il primo membro di questa Equazione, si ha per resultato

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.\phi.\cos.x\phi.\,d\phi$$

che si riduce alla forma

$$\frac{1}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.(x-1)\phi.\,d\phi+\frac{1}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.(x+1)\phi.\,d\phi$$

ed in conseguenza tanto varrà differenziare il secondo membro rapporto ad a, che variarvi prima x in $x-1$; quindi x in $x+1$, ed aggiungere i resultati, dividendone la somma per 2, e fatta questa operazione dal confronto delle simili potenze di a otterremo la equazione

$$xh_x=\frac{1}{2}h_{x-1}$$

dalla quale avrassi $\quad h_x=\frac{1}{2^x}\frac{c}{1.2.3\ldots x}$

essendo c una arbitraria, alla quale si ridurrà il valore di h_x quando sia $x=0$. Sostituendo sarà

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{1}{2^x}\frac{c}{1.2.3\ldots x}a^x\left[1+\frac{a^2}{2.(2+2x)}+\text{ec.}\right]$$

nella quale facendo $x=0$, $a=0$, troveremo $c=2$.

Sarà dunque finalmente

$$b_x=\frac{a^x}{2^{x-1}1.2.3\ldots x}\left[1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}\right.$$
$$\left.+\frac{a^6}{2.4.6.(2+2x)(4+2x)(6+2x)}+\text{ec.}\right].$$

E pertanto avremo così ottenuto il termine generale b_x nella serie

$$e^{a\cos.\phi}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec.}\ldots+b_x\cos x\phi+\text{ec.}$$

27.

Abbiamo veduto (25) che dallo sviluppo della funzione $e^{a\cos\phi}$ dipende quello della funzione più generale $F(m+\cos.\phi)$ e che il termine generale di questa discende dal termine ge-

nerale di quella variandovi a in $\frac{dFm}{dm}$, e quindi ponendo in luogo di $\left(\frac{dFm}{dm}\right)^n$ il differenziale $\frac{d^nFm}{dm^n}$. Fatte dunque queste mutazioni si troverà che il termine generale dello sviluppo di $F(m+\cos.\phi)$ è dato dalla serie

$$A_x = \frac{1}{2^{x-1}1.2.3...x}\left[\frac{d^xFm}{dm^x} + \frac{1}{2(2+2x)}\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}} + \frac{1}{2.4.(2+2x)(4+2x)}\frac{d^{x+4}Fm}{dm^{x+4}} + ec.\right].$$

ed otterremo il primo termine A aggiungendo al primo termine b dello sviluppo di $e^{a\cos.\phi}$ (dopo avervi fatte le prescritte mutazioni) la quantità $Fm-1$, poichè si ha (25)

$$F(m+\cos.\phi) = Fm - 1 + e^{\cos.\phi\frac{dFm}{dm}}.$$

28.

Ci presentano le cose precedenti una particolarità assai degna di osservazione. Il termine generale nello sviluppo della funzione $F(m+\cos.\phi)$ è identico con la analoga quantità nella evoluzione della formula $e^{a\cos.\phi}$ purchè in questa si facciano le indicate variazioni. Abbiamo veduto adesso che il termine generale b_x della serie

$$e^{a\cos.\phi} = b + b_1\cos.\phi + b_2\cos.2\phi + b_3\cos.3\phi + ec.... + b_x\cos.x\phi + ec.$$

dipende dalla Equazione

$$\frac{d^2b_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{db_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2}b_x = 0.$$

E pertanto il termine generale A_x della serie

$$F(m+\cos.\phi) = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + ec... + A_x\cos.x\phi + ec.$$

dipenderà ancor esso dalla Equazione

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2}A_x = 0$$

purchè, ordinando l' integrale di questa per le potenze di a in luogo di a^n si ponga $\frac{d^n Fm}{dm^n}$; e quindi apparisce che dopo una simile convenzione sempre la quantità

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int F(m + \cos.\phi) \cos. x\phi . d\phi$$

integrando tra i soliti limiti, sodisfarà ad una Equazione del second' ordine, e lineare, che è sempre la stessa, comunque sia Fm.

29.

Prescindiamo adesso dalla convenzione sopra stabilita, e proponghiamoci di determinare in quali casi la quantità $A_x = \frac{2}{\pi} \int F(m + \cos.\phi). \cos. x\phi . d\phi$ potrà sodisfare ad una Equazione differenziale lineare del second' ordine della forma

$$P \frac{d^2 A_x}{dm^2} + Q \frac{dA_x}{dm} + (R - x^2) A_x = 0 .$$

Supponghiamo a tale oggetto

$$z = F(m + \cos.\phi), \tag{1}$$

ed avremo differenziando, e per semplicità facendo $\frac{d^h Fm}{dm^h} = F^{(h)}_m$.

$$(2) \quad \left(\frac{dz}{dm}\right) = F'(m + \cos.\phi)$$

$$(3) \quad \left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = F''(m + \cos.\phi)$$

$$(4) \quad \left(\frac{d^2 z}{d\phi^2}\right) = (1 - \overline{\cos.\phi}^2) F''(m + \cos.\phi) - \cos.\phi F'(m + \cos.\phi).$$

Moltiplicando adesso la Equazione (3) per P, la (2) per Q, la prima per R, essendo P, Q, R funzioni di m indeterminate, ed aggiungendo la loro somma alla (4), avremo

$$\left(\frac{d^2 z}{d\phi^2}\right) + P\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = \tag{K}$$

$$(1 + P - \overline{\cos.\phi}^2) F''(m + \cos.\phi) + (Q - \cos.\phi) F'(m + \cos.\phi) + RF(m + \cos.\phi)$$

abbiamo adesso per il Teorema di Taylor

$$F(m+\cos.\phi) = Fm + \cos.\phi \frac{dFm}{dm} + \frac{\overline{\cos.\phi}^2}{2} \frac{d^2Fm}{dm^2} + \text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di $F(m+\cos.\phi)$ nel secondo membro della Equazione (K) troveremo che il coefficiente della potenza qualunque x^{esima} di $\cos.\phi$ è il seguente.

$$(P+1) \frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}} + Q \frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}} + (R-x^2) \frac{d^xFm}{dm^x}.$$

Se dunque faremo qualunque sia x,

$$(P+1) \frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}} + Q \frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}} + (R-x^2) \frac{d^xFm}{dm^x} = 0$$

svanirà il secondo membro dell' Equazione (K) e resterà

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = 0$$

alla quale Equazione a differenze parziali sodisfarà

$$z = F(m+\cos.\phi)$$

purche sia Fm in modo determinato che qualunque sia x abbiasi

$$(H) \qquad (P+1) \frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}} + Q \frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}} + (R-x^2) \frac{d^xFm}{dm^x} = 0$$

Facendo quivi $y = \frac{d^xFm}{dm^x}$, sarà $Fm = \int^x y dm^x$, ed y dipenderà dalla Equazione

$$(P+1) \frac{d^2y}{dm^2} + Q \frac{dy}{dm} + (R-x^2) y = 0.$$

Integrando questa Equazione, avremo il valore di y, che sostituito nella formula $\quad Fm = \int^x y dm^x$
ci darà Fm con $x+2$ costanti arbitrarie. E quì conviene avvertire che il valore così ottenuto conterrà nella sua espressione la costante x; ma dovendo esserne Fm indipendente, converrà determinare le costanti in modo che la x non vi apparisca.

30.

Le cose precedenti danno la soluzione del nostro quesito. Data la funzione $F(m+\cos.\phi)$, se dovrà essa sodisfare ad una Equazione a differenze parziali della forma

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0,$$

conviene che la funzione Fm sodisfaccia indipendentemente da x alla Equazione (H)

$$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0\,. \qquad (H)$$

E se potremo determinare P, Q, R in modo che una tal condizione sia verificata, facendo

$z=F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\text{ec}....+A_x\cos.x\varphi+\text{ec}.$

ove sia tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, $A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi d\varphi$,

potremo sostituire quel valore di z nella Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0,$$

ed eseguita la operazione, troveremo che acciò questa Equazione sia sodisfatta indipendentemente dai differenti coseni multipli, dovrà aver luogo, qualunque sia x la Equazione (S)

$$P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0\,. \qquad (S)$$

E viceversa poi, data la funzione

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi.d\varphi$$

integrando tra i soliti limiti, se essa dovrà sodisfare ad una equazione della forma (S), converrà che la funzione $F(m+\cos.\varphi)$ sodisfaccia alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0.$$

Ma acciò il valore di $z=F(m+\cos.\varphi)$ verifichi questa Equazione, sappiamo (29) essere indispensabile la condizione (H)

$$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0 \qquad (H)$$

alla quale Fm deve indipendentemente da x sodisfare; quindi pure sarà indispensabile questa condizione acciò la formula

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi).\cos.x\varphi.d\varphi\,.$$

sia rappresentata da una Equazione della forma

(S) $$P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0\,.$$

31.

Si è per altro veduto nel numero 28 che qualunque sia Fm, la formula

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\phi)\cos.x\phi.d\phi$$

ove l' integrale è preso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$ è sempre rappresentata, qualunque sia Fm, dalla semplicissima equazione del second' ordine

$$\frac{d^2A_x}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dA_x}{da}-\frac{(a^2+x^2)}{a^2}A_x=0$$

purchè, svolto l' integrale per le potenze di a in luogo di a^n si ponga $\frac{d^nFm}{dm^n}$.

La introduzione pertanto di questo nuovo segno rende superflua la condizione (H) nel precedente articolo riportata, poichè sempre la funzione

$$\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\phi).\cos.x\phi.d\phi$$

dipenderà, qualunque sia Fm, da una semplicissima Equazione lineare del second' ordine della forma richiesta.

Quando poi la condizione (H)

(H) $$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

sarà sodisfatta per i valori di Fm, e di P, Q, R, noi abbiamo dimostrato che alla Equazione (S)

(S) $$\frac{d^2A_x}{dm^2}+\frac{Q}{P}\frac{dA_x}{dm}+\frac{(R-x^2)}{P}A_x=0$$

sodisfarà sempre, integrando tra i soliti limiti

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\phi).\cos.x\phi.d\phi.$$

Ma questo valore di A_x dipende qualunque sia Fm dalla Equazione assai semplice

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(a^2+x^2)}{a^2}A_x = 0$$

purchè nella evoluzione rapporto ad a si facciano i soliti cambiamenti: quindi apparisce che prevalendosi di questo algoritmo, la classe estesissima delle Equazioni (S), ove la condizione (H) è verificata, deve potersi ridurre a dipendere dalla unica Equazione

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2}A_x = 0.$$

Ho riportate le precedenti particolari riflessioni per mostrare di quanta utilità può essere il variar l'algoritmo, ed i segni per i progressi del Calcolo integrale, e per la trasformazione delle Equazioni differenziali, delle quali abbiamo ora veduta una classe estesissima ridotta a dipendere da una sola e semplicissima. Il rapporto che abbiamo osservato esistere tra questa, e quelle, per cui vi è una comune soluzione, deve potersi mettere in evidenza, operando direttamente con la trasformazione della variabile rapporto a cui la differenziazione è eseguita; e sembrami che questa ricerca per la sua novità ed importanza meriti tutta l'attenzione dei Geometri.

32.

Darò fine a questa Memoria con fare osservare che il metodo stesso di cui nel numero 25. ci siamo prevalsi per la evoluzione della funzione $F(m + \cos.\varphi)$ può servire ancora per ridurre sotto una forma analoga la funzione qualunque $F(m+\varphi)$. Abbiamo infatti, facendo per semplicità $\frac{dFm}{dm} = a$

$$F(m+\varphi) = Fm - 1 + e^{a\varphi}$$

purchè nella evoluzione dell' esponenziale $e^{a\varphi}$ in luogo di a^n

pongasi $\frac{d^n Fm}{dm^n}$. Se dunque vorremo svolta in serie per i coseni degli archi multipli di ϕ la funzione $F(m+\phi)$, tutto si ridurrà a sviluppare nello stesso modo l' esponenziale $e^{a\phi}$, facendo dopo lo sviluppo le mutazioni prescritte.

Prendiamo dunque a considerare la funzione $e^{a\phi}$ e facciamo

$$e^{a\phi}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}...+b_x\cos.x\phi+\text{ec}.$$

e sarà integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$b_x=\frac{2}{\pi}\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi.$$

Noi abbiamo adesso, integrando per parti

$$\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{\text{sen}.x\phi}{x}e^{a\phi}-\frac{a}{x}\int e^{a\phi}\,\text{sen}.x\phi.\,d\phi.$$

Ed abbiamo ancora

$$\int e^{a\phi}\,\text{sen}.x\phi\,d\phi=-\frac{\cos x\phi}{x}e^{a\phi}+\frac{a}{x}\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi.$$

Quindi otterremo, sostituendo,

$$\int e^{a\phi}\cos x\phi.\,d\phi=\frac{\text{sen}.x\phi}{x}e^{a\phi}+\frac{a}{x^2}\cos.x\phi.\,e^{a\phi}-\frac{a^2}{x^2}\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi$$

onde facilmente si avrà

$$\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{x\,\text{sen}.x\phi}{x^2+a^2}e^{a\phi}+\frac{a\cos.x\phi}{x^2+a^2}e^{a\phi}.$$

Se prenderemo quest' integrale tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, si avrà nel caso di x pari

$$\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{a}{x^2+a^2}\left(e^{a\pi}-1\right)$$

e se x è dispari

$$\int e^{a\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=-\frac{a}{x^2+a^2}\left(e^{a\pi}+1\right).$$

Sarà dunque ancora, essendo x pari

$$b_x=\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{x^2+a^2}$$

e se x impari

$$b_x = -\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{x^2+a^2},$$

nel caso poi di $x=0$, essendo nella serie

$$e^{a\phi} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_x \cos.x\phi + \text{ec.}$$

il valore di b dato dalla Equazlone

$$b = \frac{1}{\pi}\int e^{a\phi}\, d\phi$$

integrando tra i soliti limiti, troveremo

$$b = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}.$$

Quindi, sostituendo questi valori, sarà

$$e^{a\phi} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi -$$
$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi + \ldots + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2n^2+a^2}\cos.2n\phi -$$
$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{(2n+1)^2+a^2}\cos.(2n+1)\phi + \text{ec.}$$

Ottenuto così lo sviluppo dell'esponenziale $e^{a\phi}$, riprendiamo la Equazione stabilita sul principio di quest' articolo

$$F(m+\phi) = Fm - 1 + e^{a\phi}$$

la quale solamente ha luogo, quando svolto l'esponenziale per le potenze di a in luogo di a^n si sostituirà $\frac{d^nFm}{dm^n}$.

Potremo dunque in quella Equazione in luogo di $e^{a\phi}$ sostituire il suo sviluppo quì sopra assegnato, tenendo ferme le condizioni stesse; quindi sarà

$$F(m+\phi) = Fm - 1 + \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi +$$
$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi + \ldots +$$
$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2n^2+a^2}\cos.2n\phi - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{(2n+1)^2+a^2}\cos.(2n+1)\phi + \text{ec.}$$

La quale espressione è una trasformata assai curiosa del teorema di Taylor.

Per darne un esempio semplicissimo, supponghiamo $Fm=m$; sarà quindi $F(m+\varphi)=m+\varphi$. Cerchiamo adesso il valore della quantità

$$\frac{2a}{\varpi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{(2n+1)^2+a^2}$$

che è il coefficiente generale dei coseni multipli dispari di φ. Noi possiamo metterlo sotto la forma

$$\frac{1}{\pi(2n+1)^2}\cdot 2a(e^{a\pi}+1).\frac{1}{1+\frac{a^2}{(2n+1)^2}}.$$

Cioè riducendo in serie per le potenze di a

$$\frac{1}{\pi(2n+1)^2}\left[4a+2a^2\pi+2a^3\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{2}{(2n+1)^2}\right)+\text{ec.}\right].$$

Ora per le condizioni stabilite abbiamo primieramente $a=\frac{dFm}{dm}=1=Fm=m$; ed in vece della potenza qualunque a^n dobbiamo sostituire $\frac{d^nFm}{dm^n}$. Pertanto la espressione superiore si ridurrà al termine unico $\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$, e questo sarà il coefficiente di $\cos.(2n+1)\varphi$.

Consideriamo ora il coefficiente generale dei coseni multipli pari di φ che abbiamo veduto essere

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2n^2+a^2}.$$

Operando in questa formula come abbiamo fatto nella superiore, vedremo immediatamente che il suo valore è sempre $=0$.

Resta ad esaminarsi il solo primo termine $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}$, il quale, ridotto in serie per le potenze di a diviene

$$1+\frac{a\pi}{2}+\frac{a^2\pi^2}{2.3}+\text{ec.}$$

che si riduce ad essere in virtù delle convenzioni stabilite

$$1+\frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo ora questi valori nella serie precedentemente assegnata

$$F(m+\phi)=Fm-1+\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}-\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi+$$

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi-\text{ec.}$$

troveremo immediatamente a cagione di $Fm=m$; e togliendo il termine comune m

$$\phi=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos.\phi+\frac{\cos.3\phi}{3^2}+\frac{\cos 5\phi}{5^2}+\frac{\cos.7\phi}{7^2}+\text{ec.}\right]$$

serie che con altro metodo ho il primo esposta altrove.

NUOVE CONSIDERAZIONI

INTORNO AD UN PROBLEMA DI PROBABILITÀ

MEMORIA

DEL SIGNOR MARCHESE LUIGI RANGONI

SOCIO ONORARIO

Ricevuta li 18. *Febbrajo* 1820.

1. Il Geometra Malfatti in una (1) delle Memorie di questa Società presentò un esame critico della soluzione data (2) da Daniele Bernoulli di un problema appartenente al calcolo delle probabilità. Questo stesso problema esposto anche con una maggior generalità fu in seguito proposto, e risoluto (3) dall' immortale Lagrange. Per evitare inutili ripetizioni riporto l' enunciativa di esso quale trovasi nella citata Memoria di Lagrange. Eccone pertanto il tenore:

„ Soit un nombre a d'urnes rangées de suite, et dont
„ chacune contienne n billets en partie blancs et en partie
„ noirs à volonté ; que l'on tire à la fois de chacune de ces
„ urnes un billet au hasard, et que l'on mette ensuite le bil-
„ let tiré de chaque urne dans l'urne suivante, en observant
„ de mettre dans la premiere urne le billet tiré de la der-
„ niere ; on demande quel sera probablement le nombre des
„ billets noirs dans chaque urne après un nombre b de pa-
„ reils tirages. „

---

(1) V. Memorie di Mat. e di Fis. della Società Italiana. T. I. pag. 768.

(2) V. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imp. Petropolitanae. T. XIV. pro anno 1769 pag. 4.

(3) V. Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale de Berlin. 1775. pag. 270.

„ Soit $y_{x,t}$ le nombre des billets noirs qu'il y aura pro-
„ bablement dans l'urne x^{eme} après t tirages, il est facile
„ de voir qu' après un nouveau tirage ce nombre sera pro-
„ bablement augmenté de $\frac{y_{x-1,t}}{n}$ et diminué de $\frac{y_{x,t}}{n}$. „

Fin quì il Lagrange, il quale dalle precedenti riflessioni ricava l' equazione

$$y_{x,t} + (n-1)y_{x+1,t} - ny_{x+1,t+1} = 0$$

che integrata con uno dei metodi generali da lui esposti nella stessa Memoria dà

$$y_{x,t} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \left(y_{x,0} + \frac{t}{n-1} y_{x-1,0} + \frac{t(t-1)}{2(n-1)^2} y_{x-2,0} + \text{ec.}\right)$$

integrale in cui il numero dei termini è $t+1$, e che si applica ai casi particolari, osservando che $y_{0,t} = y_{a,t}$, e quindi $y_{0,0} = y_{a,0}$, ed in generale $y_{-s,0} = y_{a-s,0}$ essendo s numero intero positivo, ed anche zero.

2. Per fare alcuna delle più semplici applicazioni di questa formola integrale, suppongo primieramente che si abbia $a = 2$, $y_{x,0} = n$, $y_{x-1,0} = 0$, e si cerchi $y_{2,1}$, locchè secondo le viste dell'Autore riduce il problema al caso di due urne, la prima delle quali avanti ogni estrazione contiene n biglietti bianchi, e la seconda nel caso stesso ne contiene n neri, e trattasi di determinare il numero dei biglietti neri, che probabilmente rimarranno nella seconda urna dopo la prima operazione prescritta nell' enunciato generale, che chiamerò quind' innanzi *permutazione;* comprendendo sotto questo nome il complesso dell' estrazione contemporanea di un dei biglietti da ciascuna delle due urne ora supposte, e del reciproco loro traslocamento nelle medesime. Quindi il risultato di questa prima applicazione dà

$$y_{2,1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^1 n = n - 1,$$

cioè dopo una permutazione eseguita sulle supposte due ur-

ne, si ha il numero non probabile ma certo in questo caso, come è evidente, di $n-1$ biglietti neri nella seconda urna.

3. Passando ad altre applicazioni nella stessa supposizione di due sole urne contenenti prima di ogni permutazione n biglietti rispettivamente bianchi e neri, si otterrà cercando i biglietti neri probabilmente residui nella seconda urna dopo due permutazioni.

$$y_{2,2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(n+\frac{1}{(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^2+1}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1.$$

E dopo tre permutazioni si avrà pure

$$y_{2,3}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\left(n+\frac{3}{(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^3+3(n-1)}{n^2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$$

a cagione di $(n-1)^2=(n-2)^2+2n-3$.

In generale dopo t permutazioni, e nella supposizione sempre di due sole urne, si vede facilmente, che la formula suddetta diviene

$$y_{2,t}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^t\left(n+\frac{t(t-1)}{2(n-1)^2}n\right)=\frac{(n-1)^t}{n^{t-1}}+\frac{t(t-1)(n-1)^{t-2}}{2n^{t-1}}=\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}n\left(\frac{2(n-1)^t+t(t-1)(n-1)^{t-2}}{n^t}\right)=\frac{1}{2}n\left(\frac{n^t+(n-2)^t}{n^t}\right)$$

a cagione di $2(n-1)^t+t(t-1)(n-1)^{t-2}=n^t+(n-2)^t$ come si dimostra per lo sviluppo del binomio Neutoniano. Quindi fatto $\frac{n-2}{n}=m$, si ridurrà pure quest' ultima formola ad $\frac{1}{2}n(1+m^t)$.

4. Tanto questa formola generale quanto le altre trovate ne' precedenti numeri 2, 3. sono identiche a quelle che ottenne (1) il già citato Daniele Bernoulli limitandosi alla considerazione del problema nel caso di due sole urne. Conviene però avvertire che la probabilità quì considerata relativamente ai biglietti neri fu da Bernoulli riferita a biglietti o schedole bianche, ed è ben facile a vedersi che l' una e l' altra di queste due probabilità dev' essere la stessa, poichè la condizione dei biglietti dell' una specie corrisponde perfettamente alla condizione dei biglietti o schedole dell' altra. Pertanto il

(1) Dan. Bernoulli. Mem. citata pag. 4. e seg.

Malfatti affermò d' ignorare con quale raziocinio fosse quegli pervenuto a ritrovarle, e giudicò che egli avesse confuso questo problema con un altro assolutamente diverso in cui trattasi di determinare la ragione dei componenti di un misto di acqua, e di vino derivato dal permutamento reciproco e successivo di eguali misure dei due liquidi contenuti in due botti di eguale capacità, supposte da prima ripiene rispettivamente l' una di acqua, e l' altra di vino. Di fatti potè pure il Malfatti sciogliendo questo nuovo problema ricavare quelle stesse formole, che pel suo venivano dal Bernoulli stesso assegnate. Dando perciò luogo a nuove riflessioni, riguardò come erronea la soluzione del Bernoulli, e ve ne sostituì una propria di cui si parlerà in seguito. Intanto può notarsi come independentemente dal problema delle botti si possano trovare le formole di Bernoulli e con un raziocinio analogo a quello adoperato da Lagrange.

5. Sieno due urne A, B la prima delle quali contenga n palle bianche, e la seconda n palle nere, giacchè si possono sostituire le palle ai supposti biglietti. Se cercasi qual sarà il numero delle palle nere nell' urna B dopo una permutazione, si vede subito che queste debbono essere $n-1$ di numero per B, e conseguentemente 1 per A. Facendo una seconda permutazione alle $n-1$ palle nere già esistenti in B se ne aggiungeranno probabilmente $\frac{1}{n}$, e se ne leveranno probabilmente $\frac{n-1}{n}$, cosicchè dopo la seconda permutazione saranno probabilmente in B palle nere

$$n-1+\frac{1}{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$$

come nel precedente n.° 3.

Ragionando allo stesso modo si vedrà pure che per essere rimaste probabilmente nell' urna B dopo la seconda permutazione palle nere $\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$, esse dopo la terza saran-

no accresciute di $\frac{n^2-(n-1)(n-2)-n}{n^2}$ [poichè in A sono probabilmente rimaste palle nere $n-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1\right)$], e diminuite di $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{n}$, cosicchè il numero probabile di palle nere, che saranno in B dopo la terza permutazione verrà espresso da

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1+\frac{n^2-(n-1)(n-2)-n}{n^2}-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$$

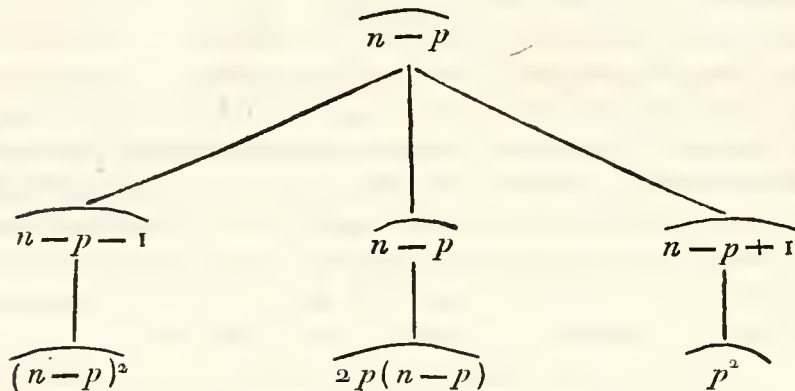
formola identica alla corrispondènte ricavata dalle soluzioni di Lagrange, e di Bernoulli: (Veggansi li prec.[i] n.[i] 3, 4.) E similmente procedendo si trovarebbero delle altre formole esprimenti ciascuna il numero probabile di palle nere che sono in B rispettivamente dopo la quarta, la quinta ec. permutazione, formole, le quali combinano perfettamente con quelle, che per gli stessi casi somministrano i metodi di questi Geometri.

6. Fin quì per altro non ho fatto che adoperare i raziocinj, ed i metodi di que' due Sommi Uomini per mostrarli uniformi, non già perchè non mi sembrino assolutamente fallaci, ed erronei. Quindi adottando in parte le riflessioni del mentovato Malfatti, osservo che la ricerca del numero probabile di una data specie di palle secondo il modo di esprimersi di Bernoulli, e di Lagrange non offre alcuna idea precisa, e che possa concordare coi principj stabiliti del calcolo delle probabilità. Inoltre i risultati che si ottengono dalle particolari applicazioni della formola generale di Bernoulli $\frac{1}{2}n(1+m^t)$ identica a quella di Lagrange nell' ipotesi di due sole urne, possano essere numeri fratti, locchè succede ogni qualvolta niuno de' fattori n, $1+m^t$ è divisibile per 2. Supposto per esempio $n=4$, $t=2$, viene espresso il numero probabile delle palle nere nell' urna B dopo la seconda permutazione da $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$, che essendo appunto numero

frazionario, non si comprende come possa corrispondere a quello delle palle, o biglietti per sua natura intero. Che se anche per l'indicato numero probabile volesse intendersi un rapporto di quantità, secondo la maniera generalmente adottata nel calcolare le probabilità, cioè il rapporto tra le combinazioni favorevoli a far entrare in un' urna una palla nera alla totalità di quelle che sono possibili, si urterebbe nell'altro assurdo di avere questo rapporto, che deve, come si sa, essere sempre minore dell' unità, espresso da una frazione impropria, e perciò maggiore dell' unità stessa. Giova eziandio l' osservare che il discorso con cui il Lagrange, e come sembra anche il Bernoulli stabilirono le loro formole porta all' addizione delle probabilità semplici anzichè alla loro moltiplicazione, siccome prescrivono le regole della probabilità composta seguite, e sostenute dall' Ugenio, da Giacomo Bernoulli, da d' Alembert, da Lacroix, da Laplace, e da quanti altri hanno trattato del calcolo delle probabilità.

7. Abbandonando però queste considerazioni intorno ad un metodo di cui il rispetto dovuto a que' due lumi grandissimi delle Scienze matematiche non può nascondere il paralogismo, conviene riguardare in altro aspetto il proposto problema. Osservò il Malfatti che se in una delle due urne fin quì considerate si hanno $n-p$ palle bianche e p nere, eseguita una permutazione non possono aversi nell' urna stessa che palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, ovvero $n-p+1$, vale a dire che il numero o stato delle palle bianche o nere contenute in ciascuna delle due urne, deve per una nuova permutazione o rimanere lo stesso, od aumentarsi o decrescere di un' unità. Si determinano quindi facilmente ed in generale i numeri delle combinazioni favorevoli a ciascuno dei tre eventi suddetti; ed ecco quanto si ottiene:

Eventi derivanti dallo stato $n-p$ di palle bianche in una delle due urne, i quali possono aver luogo dopo una permutazione, coi rispettivi numeri delle combinazioni favorevoli che li possono produrre scritti al di sotto

STATO PRIMITIVO

Ciò permesso trattasi d'indagare quale sia il numero delle combinazioni favorevoli ad un dato evento o stato di palle bianche o nere in una delle due urne dopo un dato numero di permutazioni. Ottenuto il numero ricercato si avrà anche la probabilità di quell'evento, dividendolo per il numero totale delle combinazioni sempre espresso da n^{2t}, posto che t denoti il numero delle permutazioni. Di fatto in ciascuna permutazione le n palle di una delle urne possono combinarsi colle n palle dell'altra il che da n^2 combinazioni. Ma le combinazioni date da una permutazione si legano pure con tutte quelle che appartengono alle successive permutazioni di numero t, dunque il loro numero totale sarà n^{2t}.

8. Cominciasi pertanto collo stesso Malfatti a determinare le combinazioni favorevoli ad aversi nell'urna, che chiamo A, palle bianche per esempio $n-2$ dopo una permutazione, nell'ipotesi che lo stato primitivo, cioè quello che precede

ogni permutazione riguardo alle due urne sia nell' urna A di $n-1$ palle bianche ed 1 nera, e viceversa nell' urna B.

Posto $p=1$, si vede subito che il numero delle combinazioni favorevoli, e corrispondenti all'evento $n-2$ è $(n-1)^2$, e la probabilità di esso è $\frac{(n-1)^2}{n^2}$. Così per le probabilità degli eventi $n-1$, n, si trovano le due espressioni $\frac{2(n-1)}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$. Quindi le probabilità dei tre eventi, che soli possono aver luogo dopo la prima permutazione, stanno fra loro come i numeri delle combinazioni che rispettivamente li producono. Prima di procedere ad altra ricerca è opportuno il riflettere, che se lo stato $n-p$ non può per una permutazione passare che ad uno dei tre altri $n-p-1$, $n-p$, $n-p+1$, viceversa non può essere preceduto che da uno de' tre stati medesimi, altrimenti, come è facile a vedersi, si sarebbe aumentato o diminuito rispetto allo stato precedente per più di un' unità, locchè si è veduto non poter accadere (n.° 7.)

9. Passando ora a determinare le combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ come risultato della seconda permutazione, è facile lo scorgere, che esse saranno la somma delle combinazioni che dalla prima permutazione alla seconda possono produrre i passaggi dagli stati $n-3$, $n-2$, $n-1$ allo stato $n-2$ rispettivamente moltiplicate per le combinazioni, per le quali i detti stati si ottengono immediatamente dopo la prima permutazione. Però in questo caso non essendo possibile lo stato $n-3$ come risultato della prima permutazione, perchè lo stato primitivo si è supposto $n-1$, bisognerà escludere il prodotto corrispondente. Quindi pel preced. n.° 7. la totalità delle combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ dopo la seconda permutazione sarà $4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3$, che divisa per n^4 darà la probabilità dell'evento stesso.

Cercando ora le combinazioni favorevoli ai due stati $n-1$, $n-3$ nelle stesse condizioni, si otterranno ragionando nel medesimo modo le prime espresse da $8(n-1)^2+n^2$, e le altre da $(n-1)^2(n-2)^2$.

Se di più si cerchino le combinazioni favorevoli allo stato n dopo la seconda permutazione, osservando che questo non può essere in verun caso preceduto che dagli stati $n+1$, n, $n-1$, uno dei quali solamente può aver luogo nella presente ipotesi, cioè lo stato $n-1$, si troverà il numero di quelle espresso da $2(n-1)$.

Poichè si sono ottenute tutte le combinazioni rispettivamente favorevoli agli eventi n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ risultanti dalla seconda permutazione, è opportuno il riflettere che questi sono i soli possibili dopo due permutazioni, giacchè da un canto è sempre impossibile per la natura del problema uno stato maggiore di n, e dall' altro non si avrà mai dopo due permutazioni uno stato minore di $n-3$, non potendo da una permutazione all' altra le palle di una delle due specie decrescere che di un' unità. Ciò posto è chiaro, che se si sommano tutte le combinazioni appartenenti ai detti quattro stati nascerà l' equazione identica ne' suoi membri

$$4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3+8(n-1)^2+n^2+(n-1)^2(n-2)^2+2(n-1)=n^4$$

come può verificarsi.

10. Riesce pure adesso per le cose dette facile il trovare il numero delle combinazioni favorevoli allo stato $n-2$ dopo tre permutazioni. Di fatto riflettendo (n.° 8.) che questo non può essere preceduto che da uno dei tre stati $n-1$, $n-2$, $n-3$, che sono tutti possibili come risultati della seconda permutazione, basterà per ottenere il numero richiesto sommare le combinazioni favorevoli e corrispondenti ai detti tre stati dopo la seconda permutazione moltiplicate per quelle che producono i rispettivi passaggi di essi allo stato $n-2$ dalla seconda permutazione alla terza. Secondo questa regola si avrà quindi il numero ricercato espresso da

$$(8(n-1)^2+n^2)(n-1)^2+(4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3)(4(n-2))+9(n-1)^2(n-2)^2=$$
$$8(n-1)^4+n^2(n-1)^2+16(n-1)^2(n-2)^2+8(n-1)^3(n-2)+9(n-1)^2(n-2)^2$$

formola, che differisce da quella che ritrovò (1) il Malfatti

(1) V Malfatti Mem. citata §§. 24. 18.

sciogliendo lo stesso problema pel termine $9(n-1)^2(n-2)^2$ da lui omesso per non avere tenuto conto dell' evento $n-3$ contingibile dopo la seconda permutazione.

Per avere poi il numero delle combinazioni favorevoli allo stato od evento $n-1$ dopo tre permutazioni, farà d' uopo sommare insieme le combinazioni favorevoli, e corrispondenti ai tre stati $n-1$, n, $n-2$ dopo la seconda permutazione, giacchè questi sono i soli, che pel caso in quistione possono aver luogo dopo tale permutazione, moltiplicati rispettivamente per le combinazioni che danno i passaggi di essi stati allo stato $n-1$ che si ottiene immediatamente dopo la terza permutazione. Quindi si ha pel numero ricercato l' espressione

$$(8(n-1)^2+n^2)2(n-1)+2(n-1)n^2+(2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2)4 =$$
$$=24(n-1)^3+16(n-2)(n-1)^2+4n^2(n-1).$$

Ragionando nell'istesso modo si troverà il numero delle combinazioni favorevoli all'evento $n-3$ dopo tre permutazioni espresso da $(n-1)^2(n-2)^2 6(n-3)+(2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2)\times(n-2)^2=6(n-3)(n-1)^2(n-2)^2+4(n-2)^3(n-1)^2+2(n-1)^3(n-2)^2$.

E così il numero delle combinazioni favorevoli all' evento $n-4$ sarà $=(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2$.

Finalmente pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento n si otterrà l' espressione $8(n-1)^2+n^2$.

È poi facile a vedersi come essendo $n-1$ lo stato primitivo delle palle bianche in una delle due urne, non possono dopo la terza permutazione aver luogo che questi soli cinque eventi $n-2$, $n-1$, $n-3$, $n-4$, n; e dopo la quarta permutazione oltre i detti cinque eventi può aversi anche l'altro $n-5$; e dopo la quinta oltre i sei precedenti può verificarsi anche l' evento $n-6$, e così di seguito. Del resto chiaro apparisce il modo col quale si possono determinare le combinazioni favorevoli a ciascuno di tali eventi dopo un numero qualunque di permutazioni, la quale ricerca può rendersi ne' diversi casi particolari men laboriosa col far uso della tabella del n 7. più oltre continuata, ed ha poi luogo solamente rispetto allo stato $n-p$ generalmente considerato, qualora tra esso e lo

stato primitivo non siavi una differenza maggiore del numero delle permutazioni.

11. Affine di meglio conoscere la natura del problema, e tentarne quella più generale soluzione di cui possa essere capace, è opportuno il considerarlo in altro aspetto e vedere se per avventura il calcolo delle differenze finite, che è pure la chiave adatta a svelare molta parte della dottrina delle probabilità, possa guidare anche in questo caso al bramato discoprimento. Perciò nell' ipotesi già divisata delle due urne contenenti ciascuna n palle suppongo che le palle nere, e le bianche si trovino da prima, cioè avanti ogni permutazione, comunque frammiste, così che però essendo x palle bianche nell' una di esse urne sieno $n-x$ le nere, e inversamente nell' altra. Col solo principio che lo stato x dopo la prima permutazione, e qualunque stato successivo dopo una unova permutazione non può che o rimanere invariato, o crescere, o decrescere di una unità, si formerà la tavola seguente nella quale x indica lo stato primitivo, e le x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, ec. $x-1$, $x-2$, $x-3$, ec. che si trovano disposte nelle linee orizzontali sotto ad x sono tutti gli eventi possibili dopo qualunque permutazione, il cui ordine progressivo segnato rispettivamente da (1), (2), (3), (4)....(t) è lo stesso che quello delle linee orizzontali anzidette

$$x.$$

(1) . . . . $x+1,\ x,\ x-1.$

(2) . . . . . . $x+2,\ x+1,\ x,\ x-1,\ x-2.$

(3) . . . $x+3,\ x+2,\ x+1,\ x,\ x-1,\ x-2,\ x-3.$

(4) . $x+4,\ x+3,\ x+2,\ x+1,\ x,\ x-1,\ x-2,\ x-3,\ x-4.$

. . . .

. . . .

. . . .

(t) $x+t,\ x+t-1 \ldots x+2,\ x+1,\ x,\ x-1,\ x-2, \ldots x-t+1, x-t.$

12. Col mezzo di questa tavola si vede facilmente come si generi ciascuno de' notati eventi nelle varie permutazioni, riflettendo che per la prima di esse non si possono ottenere

che gli eventi $x+1$, x, $x-1$ della linea orizzontale (1): e siccome da $x+1$ considerato come esistente dopo la prima permutazione possono solamente nascere per effetto della seconda i tre eventi $x+2$, $x+1$, x, e da x nella stessa ipotesi i tre $x+1$, x, $x-1$, e così da $x-1$ i tre x, $x-1$, $x-2$, e d'altronde fra questi nuovi eventi se ne trovano di eguali, perciò la totalità dei diversi per la seconda permutazione si ridurrà ai cinque notati nella linea orizzontale (2). Ripetendo poi anche su questi le stesse osservazioni in ordine ai risultamenti possibili della terza, quarta ec. t^{ma} permutazione, sempre meglio si renderà palese la legge con cui procedono le serie d'eventi che corrispondono ad ogni permutazione. E qui è da notarsi che qualora il numero t di permutazioni sia maggiore di $n-x$, mancheranno nella parte crescente della serie (t) contata da x verso sinistra i termini $x+t$, $x+t-1$, $x+t-2$, ec. fino ad $x+t-y$ esclusivamente, supposto $y=t-(n-x)$, giacchè niuno degli stati compresi nella detta serie può mai essere maggiore di n. Inoltre non potendo alcuno dei termini della parte decrescente della serie medesima discendere oltre lo zero, altrimenti vi avrebbero stati negativi non ammessi dalla natura del problema, si arresterà essa al termine $x-t+y'$ inclusivo, supposto $y'=t-x$.

13. Giova ora osservare per le cose da dirsi in appresso come le funzioni che possono esprimere il numero delle combinazioni rispettivamente favorevoli ai diversi eventi possibili dopo qualunque permutazione non sono sempre simili, vale a dire costituite allo stesso modo, poichè gli eventi di ciascuna delle linee orizzontali dopo la prima nella tavola del n.° 11. nascono diversamente in rapporto ai risultati della permutazione precedente. Così a cagion d'esempio l'evento $x+2$ che ha luogo dopo la seconda permutazione non può essere preceduto che dall' evento $x+1$ risultante dalla prima, laddove nelle stesse circostanze $x+1$ deriva da $x+1$, e da x'; ed x da x, $x-1$, $x+1$, e così pure $x-1$ deriva da x, $x-1$, e $x-2$ deriva solamente da $x-1$.

Non fece alcun cenno il Geometra Laplace di questa dissimiglianza di funzioni quando nel trattare (1) dello stesso problema stabilì un' equazione, la quale si riduce facilmente alla seguente

(A) ..... $z_{x,t+1}=(x+1)^2 z_{x+1,t}+2x(n-x)z_{x,t}+(n-x+1)^2 z_{x-1,t}$

cambiando quì soltanto la significazione di $z_{x,t}$, $z_{x+1,t}$ ec. per rappresentare le combinazioni favorevoli rispettivamente allo stato x, $x+1$, ec. dopo t permutazioni, mentre il Geometra Francese si servì di que' segni per indicare le probabilità corrispondenti.

14. L' equazione (A), prescindendo dal discorso con cui fu ottenuta l'accennata del Laplace, si stabilisce col seguente facile raziocinio. L' evento x dopo t permutazioni non può essere preceduto che dai tre $x+1$, x, $x-1$ dopo la $(t-1)^{esima}$ permutazione. Dunque se $z_{x,t}$ indichi il numero delle combinazioni favorevoli all' evento x dopo t permutazioni, si intende facilmente ciò che significheranno le funzioni $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, le quali essendo rispettivamente e per ordine moltiplicate pel numero delle combinazioni, che da una permutazione qualunque alla seguente producono i passaggi degli stati $x+1$, x, $x-1$ allo stato x, e riunite poscia in somma daranno pure un' altra espressione della totalità delle combinazioni favorevoli allo stato x dopo t permutazioni. Si avrà quindi l' equazione

(B) .... $z_{x,t}=(x+1)^2 z_{x+1,t-1}+2x(n-x)z_{x,t-1}+(n-x+1)^2 z_{x-1,t-1}$

dalla quale nasce l' equazione (A) facendo solamente crescere la t di un' unità.

15. La precedente formola (B) ritenuta senza alcuna modificazione, e riguardando la lettera z come segno di una

(1) V. Théorie Analytique des probabilités - seconde édition. pag. 287, e seg.

funzione generica, cioè tale che al variare degli stati e del numero delle permutazioni possa ricevere valori non riducibili ad una sola espressione generale, qualora venga applicata al caso di uno stato primitivo qualunque x, somministra una nuova prova della dissimiglianza delle funzioni per le quali è data l'equazione stessa. Fa d'uopo perciò premettere che in tal caso l'espressione $z_{x,0}$ equivale necessariamente ad 1, giacchè indicandosi con essa il numero delle combinazioni favorevoli allo stato x dopo zero permutazioni, rappresenta la medesima pur' anche la totalità delle combinazioni che appartengono a zero permutazioni. Ma queste pel n.° 7. sono $n^{2.0} = 1$. Dunque sarà $z_{x,0} = 1$. La quale equazione si può anche ottenere, osservando, che siccome stante l'ipotesi fatta la probabilità dell' evento x perviene al grado di certezza e perciò prende il valore 1, così (n.° 7.) si avrà

$z_{x,0} = 1 . n^{2.0} = 1$. Ciò posto si ponga nella formola (B) $t = 1$: si avrà

$$z_{x,1} = 2x(n-x)z_{x,0} = 2x(n-x)$$

poichè supposto essere x lo stato primitivo, deve nella stessa formola (B) necessariamente annullarsi ciascuna delle funzioni $z_{x+1,0}$, $z_{x-1,0}$, e quindi anche ciascuno dei termini di cui esse sono fattori.

Per avere poi le espressioni corrispondenti a $z_{x+1,1}$, e a $z_{x-1,1}$, sostituiscasi nella (B) successivamente $x+1$, e $x-1$ invece di x: si avranno le due equazioni

$$z_{x+1,t} = (x+2)^2 z_{x+2,t-1} + 2(x+1)(n-x-1)z_{x+1,t-1} + (n-x)^2 z_{x,t-1}$$

$$z_{x-1,t} = x^2 z_{x,t-1} + 2(x-1)(n-x+1)z_{x-1,t-1} + (n-x+2)^2 z_{x-2,t-1}$$

nelle quali ponendo $t=1$, e tralasciando anche qui i termini, che debbono svanire nella supposizione di x stato primitivo, si ha

$$z_{x+1,1} = (n-x)^2 z_{x,0} = (n-x)^2$$
$$z_{x-1,1} = x^2 z_{x,0} = x^2.$$

Per $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$, si sono adunque ritrovate col mezzo dell' equazione (B) tre espressioni affatto identiche a quelle che somministrerebbe la regola del n.° 7; ed è ben facile a comprendersi, che la cosa doveva appunto riuscire così, poichè nello stabilire l'equazione (B) si sono impiegati raziocinj dipendenti da quella regola. Pertanto considerando questi valori di $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$, osservo che se essi fossero funzioni simili, ponendo $x+1$ in vece di x nell' equazione $z_{x,1} = 2x(n-x)$ dovrebbesi avere per $z_{x+1,1}$ l' espressione $(n-x)^2$, locchè non ha luogo: e così pure ponendo $x-1$ in vece di x nell' equazione stessa, si dovrebbe per $z_{x-1,1}$ ottenere l'espressione x^2, che nemmeno si verifica. Ne consegue non potersi, anche qualora l' integrazione dell' equazione (B) non isfuggisse ai metodi conosciuti, ricavare da essa un' espressione generale atta a somministrare tutti i valori richiesti dal problema, poichè supposta pure la negata simiglianza delle funzioni, se si trovasse in generale $z_{x,t} = \Psi$, denotando per Ψ la ricercata formola data per x, t, si avrebbe pure $z_{x,1} = \Psi'$ cioè ad un' altra espressione dedotta da Ψ col porre in essa $t=1$. Dovrebbe perciò Ψ' essere identica col valore di $z_{x,1}$ ottenuto nel modo testè dichiarato, e dovrebbe nel tempo stesso per l' ipotesi somministrare i valori di $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$ solo che in essa venisse rispettivamente sostituito $x+1$, $x-1$ in vece di x, locchè si vede essere assurdo.

16. Malgrado però le sovraesposte difficoltà si possono non ostante dall' equazione (B) per via di successive sostituzioni ricavare dopo una, due, tre, ec. permutazioni quelle stesse formole, che si ottennero già nei precedenti n[i] 8. 9. 10. Suppongasi pertanto lo stato primitivo $x=n-1$, e s' in-

cominci tosto dal determinare le espressioni che danno le combinazioni favorevoli agli eventi $n-1$, n, $n-2$, che sono i soli che possano aver luogo dopo una permutazione. Mettendo $n-1$ in vece di x nelle equazioni del prec. n.° 15. che somministrano i valori di $z_{x,1}$, $z_{x+1,1}$, $z_{x-1,1}$: si avrà

$$z_{x,1}=z_{n-1,1}=2(n-1)$$
$$z_{x+1,1}=z_{n,1}=1$$
$$z_{x-1,1}=z_{n-2,1}=(n-1)^2.$$

dove $z_{n-1,1}$, $z_{n,1}$, $z_{n-2,1}$ secondo il significato loro attribuito al n.° 13. rappresentano le combinazioni che dopo una permutazione conducono rispettivamente gli eventi $n-1$, n, $n-2$. Si vede ora che tali risultati sono identici a quelli del n.° 8. locchè doveva verificarsi, siccome fu precedentemente avvertito.

17. Per dedurre poi dalla formola (B) le combinazioni favorevoli agli eventi n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ dopo la seconda permutazione, i quali possono unicamente aver luogo, stante l' ipotesi fatta dello stato primitivo $n-1$ dopo tale permutazione, pongo in essa (B) $t=2$, ed x successivamente $=n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$; omettendo i termini che di necessità debbono svanire si avranno le equazioni

$$z_{n,2}=1^2z_{n-1,1}$$
$$z_{n-1,2}=n^2.z_{n,1}+2(n-1)z_{n-1,1}+2^2.z_{n-2,1}$$
$$z_{n-2,2}=(n-1)^2z_{n-1,1}+4(n-2)z_{n-2,1}$$
$$z_{n-3,2}=(n-2)^2z_{n-2,1}$$

ovvero anche, sostituendo per $z_{n-1,1}$, $z_{n,1}$, $z_{n-2,1}$ i valori trovati nel prec. n.° 16.

$$z_{n,2}=2(n-1)$$
$$z_{n-1,2}=n^2+8(n-1)^2$$

$$z_{n-2,2}=2(n-1)^3+4(n-2)(n-1)^2$$

$$z_{n-3,2}=(n-2)^2(n-1)^2$$

risultati, che sono appunto conformi a quelli del n.° 9.

18. Nello stesso modo ponendo nell' equazione (B) $t=3$, ed x successivamente $= n, n-1, n-2, n-3, n-4$, le combinazioni, che dopo la terza permutazione producono rispettivamente ciascuno di questi cinque eventi, i quali possono soltanto aver luogo dopo tale permutazione e sempre nella supposizione di $n-1$ stato primitivo, si ricaveranno dalle equazioni

$$z_{n,3} =1.^2 z_{n-1,2}$$

$$z_{n-1,3}=n.^2 z_{n,2}+2(n-1)z_{n-1,2}+2.^2 z_{n-2,2}$$

$$z_{n-2,3}=(n-1)^2 z_{n-1,2}+4(n-2)z_{n-2,2}+3.^2 z_{n-3,2}$$

$$z_{n-3,3}=(n-2)^2 z_{n-2,2}+6(n-3)z_{n-3,2}$$

$$z_{n-4,3}=(n-3)^2 z_{n-3,2}\,.$$

ove sostituendo per $z_{n-1,2}$, $z_{n,2}$, $z_{n-2,2}$, $z_{n-3,2}$ i valori trovati nel prec. n.° 17. risulteranno le seguenti espressioni, che sono le stesse che si ebbero al n.° 10

$$z_{n,3} =n^2+8(n-1)^2$$

$$z_{n-1,3}=24(n-1)^3+16(n-2)(n-1)^2+4n^2(n-1)$$

$$z_{n-2,3}=8(n-1)^4+25(n-2)^2(n-1)^2+8(n-2)(n-1)^3+n^2(n-1)^2$$

$$z_{n-3,3}=6(n-3)(n-1)^2(n-2)^2+4(n-2)^3(n-1)^2+2(n-2)^2(n-1)^3$$

$$z_{n-4,3}=(n-3)^2(n-2)^2(n-1)^2$$

Dopo ciò è quasi superfluo l' avvertire, che l' esposto metodo vale per trovare eziandio le combinazioni favorevoli a qualunque evento in ogni supposizione del numero delle palle, e di quello delle permutazioni.

19. Vi ha però un altro modo per determinare i valori di $z_{x,t}$ in qualunque supposizione di x e di t, il quale si deduce dal successivo sviluppo delle funzioni $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, che entrano nell' equazione (B), e di quante altre da esse si ottengono coll' andamento che viene più sotto dichiarato. In tanto per brevità facciasi

$$(x+1)^2=M_x,\ 2x(n-x)=N_x,\ (n-x+1)^2=P_x$$

l' equazione (B) diverrà

$$(C)\ \ldots z_{x,t}=M_x z_{x+1,t-1}+N_x z_{x,t-1}+P_x z_{x-1,t-1}$$

dove posto $x+\omega$ in vece di x, e $t-\theta$ in vece di t, esprimendosi con ω un numero intero qualunque positivo, o negativo, ed anche zero, e con θ o lo zero, ovvero un numero intero positivo, ma però non $>t$; si avrà

$$(D)\ \ldots z_{x+\omega,t-\theta}=M_{x+\omega} z_{x+\omega+1,t-\theta-1}+N_{x+\omega} z_{x+\omega,t-\theta-1}+P_{x+\omega} z_{x+\omega-1,t-\theta-1}$$

formola dalla quale facilmente si deducono gli sviluppi delle accennate funzioni nei diversi casi, secondo i particolari valori che si attribuiscono ad ω, e a θ.

20. Col mezzo della (D) si trovino pertanto i valori di $z_{x+1,t-1}$, $z_{x,t-1}$, $z_{x-1,t-1}$, e si sostituiscano nella (C); si otterrà

$$(E)\ \ldots z_{x,t}=M_x M_{x+1} z_{x+2,t-2}+M_x(N_{x+1}+N_x)z_{x+1,t-2}+(M_x P_{x+1}+N^2_x+P_x M_{x-1})z_{x,t-2}$$
$$+P_x(N_x+N_{x-1})z_{x-1,t-2}+P_x P_{x-1} z_{x-2,t-2}.$$

Pongasi per brevità

$$M_x M_{x+1}=S,\ M_x(N_{x+1}+N_x)=S',\ M_x P_{x+1}+N^2_x+P_x M_{x-1}=S''$$
$$P_x(N_x+N_{x-1})=S''',\ P_x P_{x-1}=S^{iv},$$

e si mettano nella (E) per $z_{x+2,t-2}$, $z_{x+1,t-2}$, $z_{x,t-2}$, $z_{x-1,t-2}$, $z_{x-2,t-2}$ i valori dati similmente dalla (D): si avrà

$$(F)\ \ldots z_{x,t}=SM_{x+2} z_{x+3,t-3}+(SN_{x+2}+S'M_{x+1})z_{x+2,t-3}+(SP_{x+2}+S'N_{x+1}+S''M_x)z_{x-}$$

$$+(S'P_{x+1}+S''N_x+S'''M_{x-1})z_{x,t-3}+(S''P_x+S'''N_{x-1}+S^{iv}M_{x-2})z_{x-1,t-3}$$

$$+(S'''P_{x-1}+S^{iv}N_{x-2})z_{x-2,t-3}+S^{v}P_{x-2}\,z_{x-3,t-3}\,.$$

E qui pure facendo per brevità

$$SM_{x+2}=T\,,\ SN_{x+2}+S'M_{x+1}=T',\ SP_{x+2}+S'N_{x+1}+S''M_x=T'',$$

$$S'P_{x+1}+S''N_x+S'''M_{x-1}=T''',\ S''P_x+S'''N_{x-1}+S^{iv}M_{x-2}=T^{iv}$$

$$S'''P_{x-1}+S^{iv}N_{x-2}=T^{v},\ S^{iv}P_{x-2}=T^{vi},$$

e sviluppando nel modo sovraindicato le funzioni $z_{x+3,t-3}$, $z_{x+2,t-3}$, $z_{x+1,t-3}$, $z_{x,t-3}$, $z_{x-1,t-3}$, $z_{x-2,t-3}$, $z_{x-3,t-3}$ esistenti nel secondo membro dell' equazioue (F) si troverà

$$(G)\ .\ .\ z_{x,t}=TM_{x+3}\,z_{x+4,t-4}+(TN_{x+3}+T'M_{x+2})z_{x+3,t-4}$$

$$+(T\,P_{x+3}+T'N_{x+2}+T''M_{x+1})z_{x+2,t-4}+(T'P_{x+2}+T''N_{x+1}+T'''M_x)z_{x+1,t-4}$$

$$+(T''P_{x+1}+T'''N_x+T^{iv}M_{x-1})z_{x,t-4}+(T'''P_x+T^{iv}N_{x-1}+T^{v}M_{x-2})z_{x-1,t-4}$$

$$+(T^{iv}P_{x-1}+T^{v}N_{x-2}+T^{vi}M_{x-3})z_{x-2,t-4}+(T^{v}P_{x-2}+T^{vi}N_{x-3})z_{x-3,t-4}$$

$$+\,T^{vi}\,P_{x-3}\,z_{x-4,t-4}.$$

21. Si vede dall' andamento dell' operazione con cui dalla (C) si derivano le altre tre equazioni (E), (F), (G), che in queste si aumenta successivamente il numero dei termini della prima secondo la legge dei numeri dispari, che pure deve osservarsi ne' susseguenti sviluppi, giacchè per ognuno di essi s' introducono sempre due nuove funzioni di x e t, nelle quali tanto la differenza positiva che la negativa di x si accresce di un' unità. Si scorge egualmente come in ciascuno degli sviluppi già dati si formino i coefficienti dell' equazione, che ne nasce dipendentemente da quelli dell' altra che appartiene allo sviluppo immediatamente precedente, e dalle funzioni esplicite di x secondo una legge costante. Per conseguenza rappresentando con V, V', V'', V'''....$V^{(k-2)}$, $V^{(k-1)}$,

$V^{(k)}$ rispettivamente e per ordine i coefficienti del primo, secondo, terzo ec. termine della funzione $z_{x,t}$ sviluppata fino a $t-s+1$, l'equazione che esprimerà generalmente la stessa $z_{x,t}$ ma sviluppata fino a $t-s$ sarà manifestamente

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{H}) \ldots z_{x,t} = & \, VM_{x+s-1}\, z_{x+s,t-s} + (VN_{x+s-1} + V'M_{x+s-2}) z_{x+s-1,t-s} \\
& + (VP_{x+s-1} + V'N_{x+s-2} + V''M_{x+s-3}) z_{x+s-2,t-s} \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + (V^{(k-2)}P_{x-s+3} + V^{(k-1)}N_{x-s+2} + V^{(k)}M_{x-s+1}) z_{x-s+2,t-s} \\
& + (V^{(k-1)}P_{x-s+2} + V^{(k)}N_{x-s+1}) z_{x-s+1,t-s} \\
& + V^{(k)}P_{x-s+1}\, z_{x-s,t-s},
\end{aligned}
$$

la qual formola generale può utilmente adoperarsi per continuare oltre a $t-4$ lo sviluppo (G) della funzione $z_{x,t}$. Di fatto esprimendosi con $V, V', V'', V''', \ldots V^{v'''}$ rispettivamente e per ordine ciascuno dei coefficienti dei nove termini della (G), e posto $s=5$, la formola (H) dà subito lo sviluppo di $z_{x,t}$ protratto sino a $t-5$. Similmente da questo sviluppo col mezzo della stessa (H) si ricava quello di $z_{x,t}$ protratto sino a $t-6$, e così di seguito.

22. Per rendere manifesto l'uso, che può farsi delle precedenti formole (C), (E), (F), (G) ec. conviene notare la corrispondenza che passa fra il numero dei termini contenuti nel secondo membro di ciascuna di esse, e quello degli eventi che risultano dalle successive permutazioni, e che sono indicati dalle serie della tavola del n.° 11. Serve infatti l'equazione (C) dotata nel secondo membro di tre soli termini a determinare, nell' ipotesi di x stato primitivo, le combinazioni favorevoli ai tre eventi, che possono solamente aver luogo dopo una permutazione, siccome l'equazione (E), che nel secondo membro contiene cinque termini soltanto, mostra le combinazioni che appartengono ai cinque eventi possibili do-

po la seconda permutazione; e così proseguendo può similmente ragionarsi rispetto alle altre equazioni di ulteriore sviluppo. Pertanto fatto nella (C) $t=1$ si ricava subito (n.° 15.)

$$z_{x,1}=N_x,\ z_{x+1,1}=P_{x+1},\ z_{x-1,1}=M_{x-1}.$$

E posto $t=2$ nell' equazione (E), stante sempre la supposizione di x stato primitivo, si ha

$$z_{x,2}=M_x P_{x+1}+N_x^2+P_x M_{x-1}.$$

Per avere poi nella stessa ipotesi le combinazioni, che conducono gli altri quattro eventi $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$ che insieme coll' evento x sono i soli possibili dopo due permutazioni, pongasi in essa (E) successivamente $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$ in vece di x, si avranno le equazioni

$$z_{x-2,2}=M_{x-2} M_{x-1}$$
$$z_{x-1,2}=M_{x-1}(N_x+N_{x-1})$$
$$z_{x+1,2}=P_{x+1}(N_{x+1}+N_x)$$
$$z_{x+2,2}=P_{x+2} P_{x+1}.$$

È poi chiaro che in un modo analogo si potrebbero trovare col mezzo delle equazioni (F), (G) ec. le combinazioni corrispondenti a ciascheduno degli eventi notati nelle linee orizzontali (4) ec. della tavola del n.° 11. dopo tre, quattro ec. permutazioni.

23. Il vantaggio adunque, che si ha dalle equazioni (C), (E), (F), (G) ec. stabilite nei precedenti n.[i] 19. 20. 21. allorchè sono sviluppate in corrispondenza di un numero dato di permutazioni, di potersi dedurre qualunque valore particolare di $z_{x,t}$ da un solo de' loro termini, mostra pure la via per ricavare altri particolari valori di $z_{x,t}$ per un maggior numero di permutazioni, senza che sia d'uopo perciò di sviluppare ulteriormente le equazioni stesse. Intanto giova osservare, che il coefficiente del primo termine nell' equazione (C) è M_x quello dello stesso termine nella (E) è $M_x M_{x+1}$ il corrispon-

dente nella (F) è $M_x M_{x+1} M_{x+2}$, e nella (G) è $M_x M_{x+1} M_{x+2} M_{x+3}$.
Quindi essendo l'equazione (G) sviluppata sino a $t-4$, s'inferisce dalla legge manifesta con cui procede il coefficiente di un tal termine nelle successive equazioni dipendentemente dall'operazione per cui si ottiene, che esso per un'altra equazione sviluppata generalmente sino a $t-s$ sarà

$M_x M_{x+1} M_{x+2} M_{x+3} \ldots\ldots M_{x+s-2} M_{x+s-1}$, così che supposto x lo stato primitivo, e ponendo nella formola (H) $x-s$ in vece di s, e $t=s$, si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all'evento $x-s$ dopo s permutazioni l'espressione generale

$$\text{(K)} \ldots z_{x-s,s} = M_{x-s} M_{x-s+1} M_{x-s+2} M_{x-s+3} \ldots\ldots M_{x-2} M_{x-1}\,.$$

Parimenti si vede, che essendo rispettivamente P_x, $P_x P_{x-1}$ $P_x P_{x-1} P_{x-2}$, $P_x P_{x-1} P_{x-2} P_{x-3}$, il coefficiente dell'ultimo termine in ciascuna delle suddette equazioni, il corrispondente nell'equazione sviluppata sino a $t-s$ sarà $P_x P_{x-1} P_{x-2} P_{x-3} \ldots\ldots$ $P_{x-s+2} P_{x-s+1}$. Ponendo poi nella (H) $x+s$ in vece di s, e $t=s$, si avrà, nella stessa ipotesi di x stato primitivo, pel numero delle combinazioni favorevoli all'evento $x+s$ dopo s permutazioni l'altra formola generale

$$\text{(I)} \ldots z_{x+s,s} = P_{x+s} P_{x+s-1} P_{x+s-2} P_{x+s-3} \ldots\ldots P_{x+2} P_{x+1}\,.$$

24. Passando ora ad indagare la legge con cui procedono i coefficienti del secondo, e del penultimo termine in ciascuna delle anzidette equazioni, considero i due $VN_{x+s-1} + V'M_{x+s-2}$, $V^{(k-1)}P_{x-s+2} + V^{(k)}N_{x-s+1}$ della (H) per determinarli in un modo analogo a quello con cui si sono ottenuti nel prec. n.° 23. i coefficienti dei due termini estremi della medesima equazione, e quindi anche per avere altre due formole generali, di cui l'una dia le combinazioni che conducono l'evento $x-s+1$ dopo s permutazioni, e l'altra quelle che dopo lo stesso numero di permutazioni conducono l'evento $x+s-1$. Osservo

perciò, che il coefficiente di tal termine nella (E) sviluppata sino a $t-2$ è $M_x(N_{x+1}+N_x)$, nella (F) sviluppata sino a $t-3$ si trova $=M_x M_{x+1}(N_{x+2}+N_{x+1}+N_x)$, ed il corrispondente nella (G) sviluppata sino a $t-4$ si trova $=M_x M_{x+1} M_{x+2}\times(N_{x+3}+N_{x+2}+N_{x+1}+N_x)$, dopo di avere sostituito nei coefficienti di queste due ultime equazioni per S, S', T, T', i valori loro assegnati nel n.° 20. Di qui si scorge manifestamente, che il coefficiente $VN_{x+s-1}+V'M_{x+s-2}$ del secondo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s$ sarà $M_x M_{x+1} M_{x+2}\ldots M_{x+s-3} M_{x+s-2}(N_{x+s-1}+N_{x+s-2}+N_{x+s-3}+\ldots+N_{x+1}+N_x)$. Mettendo poi in essa (H) $x-s+1$ in vece di x e fatto $t=s$, nell' ipotesi anche quì di x stato primitivo si avrà generalmente

$$(L)\ldots z_{x-s+1,s}=M_{x-s+1} M_{x-s+2} M_{x-s+3}\ldots M_{x-2} M_{x-1}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+\ldots\ldots+N_{x-s+2}+N_{x-s+1}).$$

Similmente si vede, che essendo $P_x(N_x+N_{x-1})$ il coefficiente del penultimo termine nell' equazione (E), e $P_x P_{x-1}\times(N_x+N_{x-1}+N_{x-2})$, $P_x P_{x-1} P_{x-1}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+N_{x-3})$ i corrispondenti nella (F), e nella (G), il coefficiente $V^{(k-1)}P_{x-s+2}+V^{(k)}N_{x-s+1}$ del penultimo termine dell' equazione (H) sarà $P_x P_{x-1} P_{x-2}\ldots P_{x-s+3} P_{x-s+2}(N_x+N_{x-1}+N_{x-2}+\ldots+N_{x-s+2}+N_{x-s+1})$. Posto frattanto in essa (H) $x+s-1$ in vece di x e $t=s$ si otterrà quest' altra formola generale

$$(M)\ldots z_{x+s-1,s}=P_{x+s-1} P_{x+s-2} P_{x+s-3}\ldots P_{x+2} P_{x+1}(N_{x+s-1}+N_{x+s-2}+N_{x+s-3}+\ldots\ldots+N_{x+1}+N_x).$$

25. Nello stesso modo osservando la legge dei coefficienti del terzo, e dell' antepenultimo termine in ciascuna delle equazioni (F), (G) ec. dopo di avere in essi sostituito per S, S', S'', S''', S'v, T, T', T'', T'v, Tv, Tv', i valori loro assegnati nel preced. n.° 20 si trova facilmente pel coefficiente $VP_{x+s-1}+V'N_{x+s-2}+V''M_{x+s-3}$ del terzo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s$ l' espressione

$$M_x M_{x+1} M_{x+2} \dots M_{x+s-4} M_{x+s-3}\Big[M_{x-1} P_x + M_x P_{x+1} + M_{x+1} P_{x+2} + \dots\dots + M_{x+s-3} P_{x+s-2} + M_{x+s-2} P_{x+s-1} + N^2_x + N^2_{x+1} + N^2_{x+2} + \dots + N^2_{x+s-3} + N^2_{x+s-2} + N_x(N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+1}(N_{x+2} + N_{x+3} + \dots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+2}(N_{x+3} + \dots + N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + \text{ec.} + N_{x+s-4}(N_{x+s-3} + N_{x+s-2}) + N_{x+s-3} N_{x+s-2}\Big],$$

e pel coefficiente dell' antepenultimo termine $V^{(k-2)}P_{x-s+3} + V^{(k-1)}N_{x-s+2} + V^{(k)}M_{x-s+1}$ dell' equazione stessa si trova l' espressione

$$P_x P_{x-1} P_{x-2} \dots\dots P_{x-s+4} P_{x-s+3}\Big[M_x P_{x+1} + M_{x-1} P_x + M_{x-2} P_{x-1} + \dots\dots + M_{x-s+2} P_{x-s+3} + M_{x-s+1} P_{x-s+2} + N^2_x + N^2_{x-1} + N^2_{x-2} + \dots\dots + N^2_{x-s+3} + N^2_{x-s+2} + N_x(N_{x-1} + N_{x-2} + N_{x-3} + \dots\dots + N_{x-s+2} + N_{x-s+2}) + N_{x-1}(N_{x-2} + N_{x-3} + \dots + N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + N_{x-2}(N_{x-3} + \dots + N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + \text{ec.} + N_{x-s+4}(N_{x-s+3} + N_{x-s+2}) + N_{x-s+3} N_{x-s+2}\Big].$$

Ponendo poi nella (H) $x-s+2$ in vece di x, e $t=s$, sussistendo sempre l' ipotesi di x stato primitivo, si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento $x-s+2$ dopo s permutazioni la formola generale

$$(N) \ldots . z_{x-s+2,s} = M_{x-s+2} M_{x-s+3} M_{x-s+4} \ldots . M_{x-2} M_{x-1}$$
$$\big[M_{x-s+1} P_{x-s+2} + M_{x-s+2} P_{x-s+3} + M_{x-s+3} P_{x-s+4} + \ldots$$
$$+ M_{x-1} P_x + M_x P_{x+1} + N^2_{x-s+2} + N^2_{x-s+3} + N^2_{x-s+4} + \ldots$$
$$+ N^2_{x-1} + N^2_x + N_{x-s+2}(N_{x-s+3} + N_{x-s+4} + N_{x-s+5} + \ldots$$
$$+ N_{x-1} + N_x) + N_{x-s+3}(N_{x-s+4} + N_{x-s+5} + \ldots + N_{x-1} + N_x)$$
$$+ N_{x-s+4}(N_{x-s+5} + \ldots + N_{x-1} + N_x) + \text{ec.} + N_{x-2}(N_{x-1} + N_x)$$
$$+ N_{x-1} N_x\big].$$

E così pure ritenuto nella stessa equazione (H) $t=s$, e posto $x+s-2$ in vece di x si avrà pel numero delle combinazioni favorevoli all' evento $x+s-2$ dopo s permutazioni quest' altra formola generale

$$(O) \ldots z_{x+s-2,s} = P_{x+s-2} P_{x+s-3} P_{x+s-4} \ldots . P_{x+2} P_{x+1} \big[M_{x+s-2} P_{x+s-1}$$
$$+ M_{x+s-3} P_{x+s-2} + M_{x+s-4} P_{x+s-3} + \ldots + M_x P_{x+1} + M_{x-1} P_x$$
$$+ N^2_{x+s-2} + N^2_{x+s-3} + N^2_{x+s-4} + \ldots + N^2_{x+1} + N^2_x$$
$$+ N_{x+s-2}(N_{x+s-3} + N_{x+s-4} + N_{x+s-5} + \ldots + N_{x+1} + N_x)$$
$$+ N_{x+s-3}(N_{x+s-4} + N_{x+s-5} + \ldots + N_{x+1} + N_x) + N_{x+s-4}(N_{x+s-5}$$
$$+ \ldots + N_{x+1} + N_x) + \text{ec.} + N_{x+2}(N_{x+1} + N_x) + N_{x+1} N_x\big].$$

26. Quantunque si potesse portare più innanzi questa analisi trovando oltre le (K), (I), (L), (M), (N), (O) nuove formole generali corrispondenti ad altri termini della (H) equidistanti dal termine medio, è d' uopo però confessare che ciò esigerebbe una soverchia operosità di calcolo per cui queste formole riuscirebbero assai complicate e prolisse. Da esse inoltre difficilmente si ricaverebbe una legge comune a tutti i termini dell' equazione (H) indefinitamente sviluppata, e l' espressione generale che per avventura potesse comprenderli, dedotta anche da una non bene manifesta induzione sarebbe

pur essa di troppo intralciata ed estesa. Mi basta perciò di avere considerato il problema in tutta la sua generalità, e di avere mostrato come allo sviluppo della formola (B) non isfugga alcuno dei casi possibili notati nella tavola del n.° 11.

27. Rimane ora a mostrarsi come per facilitare il ritrovamento del numero delle combinazioni richiesto ne' diversi casi particolari secondo il metodo fin quì spiegato, giova dedurre il termine per cui viene stabilito il numero cercato corrispondentemente ad un dato sviluppo, dai termini dell' equazione ottenuta per lo sviluppo immediatamente precedente, locchè si fa chiaro col seguente esempio. Vogliasi il terzo termine che nascerebbe dalla (H) qualora fosse sviluppata sino a $t-s-1$. Senza compiere intieramente tale sviluppo di (H) si vede in primo luogo che il detto termine dovrà contenere la funzione $z_{x+s-1,t-s-1}$ con un coefficiente, che si determina tenendo conto soltanto di quelli che negli sviluppi parziali di $z_{x+s,t-s}$, $z_{x+s-1,t-s}$, $z_{x+s-2,t-s}$ secondo l'equazione (D) moltiplicano $z_{x+s-1,t-s-1}$. La somma di tali coefficienti rispettivamente e per ordine moltiplicati per quelli de' tre primi termini dell' equazione (H) sarà il coefficiente che si cercava. Ciò che si è detto riguardo al ritrovamento del terzo termine dell' equazione (H) sviluppata sino a $t-s-1$, mostra pure la regola per ottenere egualmente il quarto, quinto ec. di quà però dal penultimo. È poi evidente che la regola stessa si estende a qualunque sviluppo della (H) in relazione allo sviluppo immediatamente successivo. Sarà eziandio facile il convincersi, che il primo termine e l'ultimo di qualunque equazione risultante da uno degli sviluppi della (H) rispettivamente derivano da un solo de' termini dell' equazione data dallo sviluppo precedente, siccome il secondo ed il penultimo di quella nascono rispettivamente da due soli termini di questa. Ciascuno poi de' rimanenti termini della prima nasce da tre della seconda, l'uno de' quali trovasi

nella stessa sede rispettiva riguardo al primo termine, e gli altri due occupano le sedi più prossime retrocedendo verso questo stesso primo termine.

28. Per estendere, e viemmaggiormente far conoscere l' uso del metodo testè esposto, è opportuno di considerare un altro problema del tutto analogo al fin quì trattato ed alquanto più semplice, comecchè presenti le stesse difficoltà che non furono avvertite da Laplace, a cui pure piacque di tradurlo in simboli non diversi da quelli ai quali sottomise l' altro. Suppongasi perciò una sola urna che contenga la totalità di n palle in parte bianche e in parte nere, dalla quale per una operazione ripetuta si estragga una palla a sorte sostituendovi costantemente una nera. Si cerca il numero delle combinazioni favorevoli ad un qualunque stato possibile di palle bianche nell' urna. Si denoti per x lo stato primitivo delle palle bianche nell' urna, e conseguentemente per $n-x$ quello delle nere. È evidente, che allo stato x, eseguita la prescritta estrazione e la successiva sostituzione, le quali entrambe comprenderò in seguito sotto il solo nome di *trasmutamento*, non può succedere che uno degli stati x, $x-1$. Il primo ha luogo, come è abbastanza chiaro, quando si estrae dall' urna una palla nera, ed il secondo quando se ne estrae una bianca. È poi anche evidente, che il numero delle palle bianche nei successivi trasmutamenti può bensì scemare, quantunque solo di un' unità per ciascuno di essi, ed anche talvolta rimanere il medesimo, ma non può crescere giammai. All' incontro il numero $n-x$ delle palle nere può esso pure rimanere lo stesso dall' uno all' altro degli indicati trasmutamenti, o crescere di un' unità, ma non può scemarsi. Con queste osservazioni si costruisce facilmente la serie seguente di palle bianche, o nere, che ponno succedersi da un trasmutamento qualunque all' altro contiguo fino al $r.^{mo}$ partendo dai supposti stati primitivi:

x stato primitivo di palle bianche, $n-x$ stato primitivo di palle nere

$x,\ x-1$ . . . . (1) . . $n-x,\ n-x+1$

$x,\ x-1,\ x-2$ . . . . (2) . . $n-x,\ n-x+1,\ n-x+2$

$x,\ x-1,\ x-2,\ x-3$ . . . . (3) . . $n-x,\ n-x+1,\ n-x+2,\ n-x+3$

. . . .

. . . .

$x,\ x-1,\ x-2,$ ...... $x-r$ ... (r) . . $n-x,\ n-x+1,\ n-x+2$, ... $n-x+r$.

29. Anche nelle condizioni del presente problema se si esprimano collo stesso segno di funzione i numeri delle combinazioni rispettivamente favorevoli agli stati di palle bianche o nere dopo un qualunque numero di trasmutamenti, s' incontrerà l' inconveniente che confonde insieme funzioni dissimili nel senso indicato ai precedenti n.^{i} 13. 15. A cagion d' esempio, poichè dopo il trasmutamento (1) gli stati x, $x-1$ delle palle bianche nascono diversamente da x, portando l' uno la conservazione dello stato primitivo, e l' altro il decrescimento del medesimo per un' unità, ne viene che le funzioni esprimenti le rispettive combinazioni favorevoli che essi hanno sono dissimili. Lo stesso può dirsi riguardo agli stati, che possono esistere dopo il trasmutamento (2), giacchè l' uno di essi cioè x non può nascere che da x supposto esistere dopo il trasmutamento (1), ed $x-1$ può nascere da x, ovvero da $x-1$, e lo stato $x-2$ non può nascere che da $x-1$. Si vede poi come un tale discorso può estendersi generalmente a tutte le combinazioni relative ad ogni evento sia di palle bianche quanto di nere, che possa verificarsi dopo qualunque altro numero di trasmutamenti.

30. Frattanto per istabilire un' equazione, che esprima le condizioni del problema s' indichi con $z_{x,r}$ il numero delle combinazioni favorevoli allo stato qualunque x di palle bianche nell' urna dopo r trasmutamenti. Non potendo, anche per le cose dette, lo stato x aver luogo dopo il trasmutamento r^{esimo} se non qualora sia preceduto da uno degli stati $x,\ x+1$ risultanti dal trasmutamento $(r-1)^{mo}$, se si rappresentino per

$z_{x,r-1}$, $z_{x+1,r-1}$ le combinazioni che ad essi corrispondono, queste rispettivamente moltiplicate per quelle che appartengono ai passaggi dagli stati x, $x+1$ allo stato x, e ridotte in somma equivaranno a $z_{x,r}$, cioè si avrà l'equazione

$$(A') \ldots z_{x,r}=(x+1)z_{x+1,r-1}+(n-x)z_{x,r-1},$$

ossia facendo crescere la r di un' unità

$$z_{x,r+1}=(x+1)z_{x+1,r}+(n-x)z_{x,r},$$

la quale diviene identica all' altra ritrovata (1) da Laplace, rivolgendo le funzioni da lui usate per esprimere le probabilità degli eventi a significare i rispettivi numeri delle combinazioni favorevoli ai medesimi.

Volendo poi le combinazioni favorevoli ad aversi $n-x$ palle nere dopo r trasmutamenti, facendo uso di analoghi raziocinii si trovarebbe l'equazione

$$(B') \ldots z_{n-x,r}=(n-x)z_{n-x,r-1}+(x+1)z_{n-x-1,r-1}.$$

31. Ponendo per brevità nell' equazione (A')

$$x+1=Q_x, \quad n-x=R_x,$$

si avrà

$$(C') \ldots z_{x,r}=Q_x z_{x+1,r-1}+R_x z_{x,r-1},$$

la quale può svilupparsi in un modo simile a quello che fu indicato al n.° 20. relativamente all' altro problema, variando in essa opportunamente la x, e la r per avere i valori di $z_{x+1,r-1}$, $z_{x,r-1}$, $z_{x+2,r-2}$, $z_{x+1,r-2}$, $z_{x,r-2}$, $z_{x+3,r-3}$, $z_{x+2,r-3}$ ec. $z_{x+4,r-4}$ ec. $z_{x+5,r-5}$ ec. da sostituirsi nell'equazione (C') e in quelle che successivamente da essa derivano. Per tal modo si otterranno le seguenti equazioni, sviluppando la funzione $z_{x,r}$ sino ad $r-5$ onde meglio si vegga la legge con cui procedono i coefficienti dei termini di ognuna delle medesime:

(1) V. Théo. Analyt. des probabilités ed. cit. pag. 284.

$$(D')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} z_{x+2,r-2} + Q_x\left(R_x + R_{x+1}\right) z_{x+1,r-2} + R_x^2 z_{x,r-2}$$

$$(E')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} z_{x+3,r-3} + Q_x Q_{x+1}\left(R_x + R_{x+1} + R_{x+2}\right) z_{x+2,r-3}$$
$$+ Q_x\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x R_{x+1}\right) z_{x+1,r-3} + R_x^3 z_{x,r-3}$$

$$(F')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3} z_{x+4,r-4} + Q_x Q_{x+1} Q_{x+2}\left(R_x + R_{x+1} + R \ldots\right.$$
$$+ Q_x Q_{x+1}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_{x+2}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2}\right) + R_{x+1} R_{x+2}\right) z_{x+2,r-4}$$
$$+ Q_x\left(R_x^3 + R_{x+1}^3 + R_x R_{x+1}\left(R_x + R_{x+1}\right)\right) z_{x+1,r-4} + R_x^4 z_{x,r-4}$$

$$(G')\ldots z_{x,r} = Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3} Q_{x+4} z_{x+5,r-5}$$
$$+ Q_x Q_{x+1} Q_{x+2} Q_{x+3}\left(R_x + R_{x+1} + R_{x+2} + R_{x+3} + R_{x+4}\right) z_{x+4,r-5}$$
$$+ Q_x Q_{x+1} Q_{x+2}\Big[R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_{x+2}^2 + R_{x+3}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2} + R_{x+3}\right)$$
$$+ R_{x+1}\left(R_{x+2} + R_{x+3}\right) + R_{x+2} R_{x+3}\Big] z_{x+3,r-5}$$
$$+ Q_x Q_{x+1}\Big[R_x^3 + R_{x+1}^3 + R_{x+2}^3 + R_x R_{x+1}\left(R_x + R_{x+1}\right)$$
$$+ R_{x+2}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x\left(R_{x+1} + R_{x+2}\right) + R_{x+1} R_{x+2}\right)\Big] z_{x+2,r-5}$$
$$+ Q_x\Big[R_x^4 + R_{x+1}^4 + R_x R_{x+1}\left(R_x^2 + R_{x+1}^2 + R_x R_{x+1}\right)\Big] z_{x+1,r-5} + R_x^5 z_{x,r-5}$$

32. L' andamento dell' operazione per cui si ottengono dalla (A') le formole (D'), (E'), (F'), (G') fa scorgere che ne' successivi sviluppi si aumenta sempre di un solo termine il secondo membro di ognuna delle medesime in corrispondenza al numero degli eventi che appartengono ad ogni trasmu-

tamento secondo la tavola del n.° 28. È inoltre da osservarsi che il primo termine di ciascuna delle anzidette equazioni ha per coefficiente il prodotto di tante funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. per ordine incominciando da Q_x quante sono le unità sottratte da r; che il coefficiente del secondo termine ha per uno de' suoi fattori il prodotto delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. esclusa l' ultima che trovasi nel coefficiente del primo termine, e per altro fattore la somma di tutte le funzioni R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. sino a quella inclusivamente in cui l' aumento di x è minore di un' unità del numero sottratto da r; che il coefficiente del terzo termine è composto di due fattori, l' uno dei quali è lo stesso prodotto delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. esclusa l' ultima che entra nel coefficiente del termine precedente, e l' altro fattore è la somma dei prodotti di due dimensioni che possono formarsi coll' adoperare le funzioni R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. fino a quella esclusivamente che è l' ultima nel coefficiente del termine precedente, tanto moltiplicandole per se medesime, che fra loro. Tutti i coefficienti degli altri termini che vengono dopo si riducono sempre al prodotto di due fattori, ne' quali progressivamente si adempie la stessa legge di diminuzione nel numero delle funzioni Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} ec. R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. che entrano a comporli, e si aumenta sempre di un' unità l' egual dimensione di tutti i prodotti che possono farsi colle stesse R_x, R_{x+1}, R_{x+2} ec. Questa regola ne insegna, che volendosi in generale il coefficiente del termine p.^{simo} dell' equazione (A') sviluppata sino ad $r-s$, si avrà l' uno de' fattori espresso da Q_x, Q_{x+1}, Q_{x+2} . . . Q_{x+s-p}, dove p non può mai essere per la natura degli anzidetti sviluppi $> s$. Per avere poi l' altro fattore in cui entrano le funzioni R_x,

R_{x+1}, R_{x+2} ec. si rifletta, che mentre il primo termine di ognuna delle prec. equazioni (D'), (E'), (F'), (G') non contiene alcuna di esse funzioni, il coefficiente del secondo ne contiene un numero eguale alle unità sottratte da r, il qual numero va poi sempre scemando di un' unità ne' successivi termini. Adunque il termine $p.^{simo}$ dell' equazione sviluppata sino ad $r-s$ ne conterrà un numero $s-p+2$; cioè le funzioni stesse saranno R_x, R_{x+1}, R_{x+2}, ... $R_{x+s-p+1}$, le quali però si dovranno moltiplicare per se medesime, e fra loro, per ottenere tutti i possibili prodotti di $p-1$ dimensioni. Sarà così determinata un' espressione generale, la quale servirà a dare il valore di $z_{x,r}$ in qualunque supposizione di x, e di r. Indicando infatti per X la somma di tutti i prodotti di $p-1$ dimensioni che costituisce questo secondo fattore del coefficiente del termine $p.^{simo}$, siffatto termine verrà pertanto rappresentato da $Q_x\ Q_{x+1}\ Q_{x+2} \ldots Q_{x+s-p} . X . z_{x+s-p+1,\, r-s}$. E supponendo $x+s-p+1$ lo stato primitivo, ed $r=s$, dall' equazione che somministra lo sviluppo di $z_{x,r}$ protratto sino a $t-s$ si ricaverà l' altra

$$z_{x,s} = Q_x\, Q_{x+1}\, Q_{x+2} \ldots Q_{x+s-p} . X,$$

giacchè, stante la fatta ipotesi, $z_{x+s-p+1,0}$ diviene $=1$, e svanisce manifestamente ciascuno degli altri termini di quell' equazione.

33. Venendo ora a considerare l' equazione (B'), si fa manifesto che essa esprime le stesse condizioni della (A'), e può riguardarsi come identica alla medesima, giacchè le combinazioni che danno x palle bianche dopo r trasmutamenti espresse da $z_{x,r}$ sono evidentemente le stesse di quelle, che danno $n-x$ palle nere dopo lo stesso numero r di trasmutamenti e sono indicate da $z_{n-x,r}$. Giova ciò non pertanto col mezzo degli sviluppi di questa equazione (B') conformi ai prati-

cati sulla (A') dedurre qualche altra osservazione intorno ai coefficienti dei diversi termini, che conduca a facilitare l'applicazione dell'una e dell'altra ai casi particolari. Si faccia quindi nella (B') $n-x=y$; si avrà

(H') . . . . $z_{y,r}=yz_{y,r-1}+(n-y+1)z_{y-1,r-1}$.

Per abbreviare poi i risultati che si ottengono sviluppando l'equazione (H') fino ad $r-6$, si premettono le seguenti posizioni $n-y+1=T_y$.

$y+(y-1)=A$, $A+(y-2)=B$, $B+(y-3)=C$, $C+(y-4)=D$, $D+(y-5)=E$

$y^2+A(y-1)=A'$, $A'+B(y-2)=B'$, $B'+C(y-3)=C'$, $C'+D(y-4)=D'$

$y^3+A'(y-1)=A''$, $A''+B'(y-2)=B''$, $B''+C'(y-3)=C''$

$y^4+A''(y-1)=A'''$, $A'''+B''(y-2)=B'''$

$y^5+A'''(y-1)=A^{IV}$.

Nasceranno così le altre equazioni

(K')... $z_{y,r}=y^2z_{y,r-2}+AT_yz_{y-1,r-2}+T_yT_{y-1}z_{y-2,r-2}$

(I').... $z_{y,r}=y^3z_{y,r-3}+A'T_yz_{y-1,r-3}+BT_yT_{y-1}z_{y-2,r-3}+T_yT_{y-1}T_{y-2}z_{y-3,r-3}$

(L')... $z_{y,r}=y^4z_{y,r-4}+A''T_yz_{y-1,r-4}+B'T_yT_{y-1}z_{y-2,r-4}+CT_yT_{y-1}T_{y-2}z_{y-3,r-4}$
$+T_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}z_{y-4,r-4}$

(M')... $z_{y,r}=y^5z_{y,r-5}+A'''T_yz_{y-1,r-5}+B''T_yT_{y-1}z_{y-2,r-5}+C'T_yT_{y-1}T_{y-2}z_{y-3,r-5}$
$+DT_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}z_{y-4,r-5}+T_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}T_{y-4}z_{y-5,r-5}$

(N')... $z_{y,r}=y^6z_{y,r-6}+A^{IV}T_yz_{y-1,r-6}+B'''T_yT_{y-1}z_{y-2,r-6}+C''T_yT_{y-1}T_{y-2}z_{y-3,r-6}$
$+D'T_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}z_{y-4,r-6}+ET_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}T_{y-4}z_{y-5,r-6}$
$+T_yT_{y-1}T_{y-2}T_{y-3}T_{y-4}T_{y-5}z_{y-6,r-6}$.

34. Dalla considerazione del primo termine in ciascuna di queste equazioni è facile a rilevarsi, che per un qualunque sviluppo protratto fino ad $r-s$ il coefficiente del primo termine è y^s. Quello poi del secondo oltre il fattore T_y contiene anche l'altro $A^{(s-2)}=y^{s-1}+A^{(s-3)}(y-1)$, osservato l'ordine degli apici di A secondo le posizioni del preceden-

te n.° 33. E quì è da avvertirsi che quando $s=2$, $A^{(s-3)}=A^{(-1)}$ rappresenta l'unità, la quale appunto è l'altro fattore che oltre a T_y compone il coefficiente del secondo termine nella (H'). Colle opportune sostituzioni del valore di A in A', di quello di A' in A'', di quello di A'' in A''', e di quello di A''' in A'^v si troverà

$$A'=y\,(y+(y-1))+\ (y-1)^2$$
$$A''=y^2(y+(y-1))+y\,(y-1)^2+\ (y-1)^3$$
$$A'''=y^3(y+(y-1))+y^2(y-1)^2+y(y-1)^3+(y-1)^4$$
$$A'^v=y^4(y+(y-1))+y^3(y-1)^2+y^2(y-1)^3+y(y-1)^4+(y-1)^5;$$

così che in generale per lo sviluppo protratto fino ad $r-s$ si avrà

$$(O')\ldots A^{(s-2)}=y^{s-2}(y+(y-1))+y^{s-3}(y-1)^2+y^{s-4}(y-1)^3+y^{s-5}(y-1)^4+\text{ec.}$$
$$+\,y(y-1)^{s-2}+(y-1)^{s-1}.$$

Non è fuor di proposito l'aggiungere che le posizioni del prec. n.° 33. in relazione al coefficiente del secondo termine in ciascuna delle equazioni (K'), (I'), (L') ec. maneggiate convenientemente in altro modo somministrano pure le seguenti equazioni

$$A=2y-1$$
$$A'=3y^2-3y+1$$
$$A''=4y^3-6y^2+4y-1$$
$$A'''=5y^4-10y^3+10y^2-5y+1$$
$$A'^v=6y^6-15y^4+20y^3-15y^2+6y-1,$$

nelle quali osservando l'andamento dei termini de' loro secondi membri s'inferisce, che generalmente sarà

$$(P')\ \ldots\ A^{(s-2)}=sy^{s-1}-\frac{s(s-1)}{2}y^{s-2}+\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}y^{s-3}$$
$$-\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2.3.4}y^{s-4}+\text{ec.}\mp\frac{s(s-1)}{2}y^2\pm sy\mp 1,$$

ove i segni superiori valgono quando s è numero pari, e gli inferiori quando s è dispari. In tal modo si è trovata per $A^{(s-2)}$

un' altra espressione più semplice, che deve però immancabilmente essere identica all' altra (O'), e che si riduce manifestamente ad $y^s-(y-1)^s$.

35. L' ispezione dei coefficienti de' terzi termini nelle equazioni (K'), (I') ec. fa vedere che ciascuno di essi ha sempre per uno de' fattori il prodotto $T_y\, T_{y-1}$, e per altro in generale l' espressione $B^{(s-3)}=A^{(s-3)}+B^{(s-4)}(y-2)$ (n.° 33.), ove pure conviene notare che quando $s=2$ dev' essere $B^{(-2)}=0$, e $B^{(-1)}=A^{(-1)}=1$. Ora sostituendo nelle posizioni dello stesso n.° 33. a B, B', B'' i loro valori dati per A, A', e A'', si otterranno le equazioni

$$B'=A'+A(y-2)+(y-2)^2$$
$$B''=A''+A'(y-2)+A(y-2)^2+(y-2)^3$$
$$B'''=A'''+A''(y-2)+A'(y-2)^2+A(y-2)^3+(y-2)^4.$$

Adunque in generale per lo sviluppo protratto sino ad $r-s$ si avrà

$$(Q')\ldots B^{(s-3)}=A^{(s-3)}+A^{(s-4)}(y-2)+A^{(s-5)}(y-2)^2+A^{(s-6)}(y-2)^3+\text{ec.}$$
$$+A(y-2)^{s-3}+(y-2)^{s-2},$$

la quale formola si potrà esprimere soltanto per y, ponendo in vece di $A^{(s-3)}$, $A^{(s-4)}$, $A^{(s-5)}$, ec. i loro valori in y, che si ricavano dalla (P') ridotta, facendo all' uopo variare la s.

Il coefficiente poi del quarto termine in ciascuno dei suddetti sviluppi, come in qualunque altro che potesse successivamente eseguirsi, contiene sempre il fattore $T_y\, T_{y-1}\, T_{y-2}$, e generalmente per lo sviluppo fino ad $r-s$ ha inoltre l' altro $C^{(s-4)}=B^{(s-4)}+C^{(s-5)}(y-3)$ secondo le posizioni del citato n.° 33. Eliminando dalle medesime le C, C' in modo analogo al già praticato sulle B, B', B'' si avrà

$$C'=B'+B(y-3)+(y-3)^2$$
$$C''=B''+B'(y-3)+B(y-3)^2+(y-3)^3,$$

e quindi

$$(R')\ldots C^{(s-4)} = B^{(s-4)} + B^{(s-5)}(y-3) + B^{(s-6)}(y-3)^2 + \text{ec.} + B(y-3)^{s-4} + (y-3)^{s-3},$$

ove ponendo per $B^{(s-4)}$, $B^{(s-5)}$, $B^{(s-6)}$ ec. le espressioni in y, che si possono dedurre dalla formola (Q'), si avrà pur'anche $C^{(s-4)}$ data soltanto per y.

36. Passando agli altri coefficienti si vede, che ciascuno di essi conterrà due fattori, uno dei quali è il prodotto delle funzioni T_y, T_{y-1}, T_{y-2} ec. il cui numero gradatamente si accresce di un' unità dal secondo termine al terzo, dal terzo al quarto, dal quarto al quinto, e così successivamente, e l' altro vien dato dall' analogo nel coefficiente del termine che precede, e quindi sempre retrocedendo potrà esprimersi per una funzione della sola y. Il coefficiente però dell' ultimo termine dell' equazione comunque sviluppata fino ad $r-s$ rimane sempre determinato per se medesimo in relazione ad y, contenendo soltanto il fattore $T_y T_{y-1} T_{y-2} T_{y-3} \ldots T_{y-s+1}$ moltiplicato per l' unità. Questa operazione, che guida a ritrovare le combinazioni favorevoli ad ogni stato di palle nere nell' urna dopo un qualunque numero di trasmutamenti, nel modo stesso che fu indicato al n.° 32. rispetto alle bianche, potrebbe forse abbreviarsi dando luogo, in proposito delle serie in cui sono disposti i suindicati coefficienti, a nuove considerazioni, le quali si omettono perchè condurrebbero il presente scritto a soverchia prolissità. Il ritrovamento di tali coefficienti può eziandio qualche volta facilitarsi, cominciando dal determinarli in ogni equazione dagli ultimi termini retrocedendo verso il primo, locchè sempre giova pe' coefficienti che rimangono di quà dal termine, o dai termini di mezzo, i quali altrimenti dovrebbero determinarsi con più lunga operazione partendo dal primo termine.

Il metodo fin quì spiegato, che sarebbe desiderabile di poter ridurre almeno per molti casi a maggiore semplicità, si ravvisa però facilmente tale da potersi applicare con uti-

lità a quelle equazioni alle differenze, che contenendo funzioni simili non sono integrabili coi metodi conosciuti, non meno che a quelle, le quali appunto come le già considerate contengono funzioni dissimili, e non sono perciò trattabili coi processi del calcolo delle differenze finite.

Fine della Parte Matematica del T.° XVIII.